6.8 定積分の性質

定積分の定義を復習する.

[定義] 実数 a と b とについて $a \le b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n =$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．

$\lim_{n \to \infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n \to \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，

　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：

$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n =$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．

$\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，

　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：

$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．

$\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，

　　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：

$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．$\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，f のリーマン和 S_n の極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ．

関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する： $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ ．

以下の定理が成り立つ.

[定理 **6.8.1**]　定数 k は変数 x と無関係とする. 関数 $f(x)$ が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき, 関数 $kf(x)$ も a から b まで積分可能であり,

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

[定理 **6.8.2**]　関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき, 関数 $f(x)+g(x)$ 及び $f(x)-g(x)$ も a から b まで積分可能であり,

$$\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{（複号同順）}.$$

これらを証明する.

実数 a, b について $a \leq b$ で，関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは a から b まで積分可能であるとする．次のことを示す：関数 $f(x)+g(x)$ も a から b まで積分可能であり，

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{f(\xi_k) + g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})] \ ,$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \ ,$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \{g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \ ,$$

と定める.

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{f(\xi_k) + g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})] \ ,$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \ ,$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \{g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \ ,$$

と定める．S_n は関数　　　　　　　　　　　のリーマン和であり，T_n は関数　　　　　のリーマン和であり，U_n は関数　　　　　のリーマン和である．

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{f(\xi_k) + g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})] \ ,$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \ ,$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \{g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \ ,$$

と定める. S_n は関数 $f(x) + g(x)$ のリーマン和であり, T_n は関数 $f(x)$ のリーマン和であり, U_n は関数 $g(x)$ のリーマン和である.

関数 $f(x)+g(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ と

関数 $f(x)$ のリーマン和 $T_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ と

関数 $g(x)$ のリーマン和 $U_n=\sum_{k=1}^{n}\{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ と

について，

関数 $f(x)+g(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}[\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ と

関数 $f(x)$ のリーマン和 $T_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ と

関数 $g(x)$ のリーマン和 $U_n = \sum_{k=1}^{n}\{g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ と

について，

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}[\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} + \sum_{k=1}^{n}\{g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\
&= T_n + U_n \quad .
\end{aligned}
$$

関数 $f(x)+g(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ と

関数 $f(x)$ のリーマン和 $T_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ と

関数 $g(x)$ のリーマン和 $U_n=\sum_{k=1}^{n}\{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ と

について，

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}[\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})+g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}+\sum_{k=1}^{n}\{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \\
&= T_n+U_n \quad .
\end{aligned}
$$

つまり，関数 $f(x)+g(x)$ のリーマン和 S_n は，関数 $f(x)$ のリーマン和 T_n と関数 $g(x)$ のリーマン和 U_n との和である．

$n \to \infty$ のとき $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ は 0 に収束するとする. このときリーマン和の極限値が定積分になる.

$n \to \infty$ のとき $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ は 0 に収束するとする.

T_n は関数 $f(x)$ のリーマン和なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b f(x)\,dx$.

U_n は関数 $g(x)$ のリーマン和なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} U_n = \int_a^b g(x)\,dx$.

$n \to \infty$ のとき $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ は 0 に収束するとする.

T_n は関数 $f(x)$ のリーマン和なので $\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b f(x)\,dx$.

U_n は関数 $g(x)$ のリーマン和なので $\lim_{n\to\infty} U_n = \int_a^b g(x)\,dx$.

$S_n = T_n + U_n$ なので,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(T_n + U_n) = \lim_{n\to\infty} T_n + \lim_{n\to\infty} U_n = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

このように $n \to \infty$ のとき S_n は収束する.

$n \to \infty$ のとき $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ は 0 に収束するとする.

T_n は関数 $f(x)$ のリーマン和なので $\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b f(x)\,dx$.

U_n は関数 $g(x)$ のリーマン和なので $\lim_{n\to\infty} U_n = \int_a^b g(x)\,dx$.

$S_n = T_n + U_n$ なので,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(T_n + U_n) = \lim_{n\to\infty} T_n + \lim_{n\to\infty} U_n = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

このように $n \to \infty$ のとき S_n は収束する. S_n は関数 $f(x) + g(x)$ のリーマン和なので

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^6 \left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^6 \left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx$ を計算する.

$$\int_2^6 \left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx = \int_2^6 \frac{x}{8}\,dx + \int_2^6 \frac{7}{x}\,dx = \frac{1}{8}\int_2^6 x\,dx + 7\int_2^6 \frac{1}{x}\,dx$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^6 \left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx$ を計算する.

$$
\begin{aligned}
\int_2^6 \left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx &= \int_2^6 \frac{x}{8}\,dx + \int_2^6 \frac{7}{x}\,dx = \frac{1}{8}\int_2^6 x\,dx + 7\int_2^6 \frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^6 + 7[\ln|x|]_2^6 = \frac{1}{8}\,\frac{36-4}{2} + 7(\ln 6 - \ln 2) \\
&= 2 + 7\ln 3 \ .
\end{aligned}
$$

例 定積分 $\displaystyle\int_2^6\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx$ を計算する.

$$
\begin{aligned}
\int_2^6\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx &= \int_2^6\frac{x}{8}\,dx+\int_2^6\frac{7}{x}\,dx=\frac{1}{8}\int_2^6 x\,dx+7\int_2^6\frac{1}{x}\,dx\\
&=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^6+7[\ln|x|]_2^6=\frac{1}{8}\,\frac{36-4}{2}+7(\ln 6-\ln 2)\\
&=2+7\ln 3\ .
\end{aligned}
$$

不定積分を計算してもよい.

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^6 \left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx$ を計算する.

$$\begin{aligned}\int_2^6 \left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx &= \int_2^6 \frac{x}{8}\,dx + \textstyle\int_2^6 \displaystyle\frac{7}{x}\,dx = \frac{1}{8}\textstyle\int_2^6 x\,dx + 7\textstyle\int_2^6 \displaystyle\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^6 + 7[\ln|x|]_2^6 = \frac{1}{8}\,\frac{36-4}{2} + 7(\ln 6 - \ln 2) \\ &= 2 + 7\ln 3\ \ .\end{aligned}$$

不定積分を計算してもよい. 積分定数を C とおく.

$$\int \left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx \,=\, \int \frac{x}{8}\,dx + \int \frac{7}{x}\,dx \,=\, \frac{1}{8}\textstyle\int x\,dx + 7\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx \,=\, \frac{x^2}{16} + 7\ln|x| + C\ \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^6\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx$ を計算する.

$$
\begin{aligned}
\int_2^6\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx &= \int_2^6\frac{x}{8}\,dx+\int_2^6\frac{7}{x}\,dx = \frac{1}{8}\int_2^6 x\,dx+7\int_2^6\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^6+7[\ln|x|]_2^6 = \frac{1}{8}\,\frac{36-4}{2}+7(\ln 6-\ln 2) \\
&= 2+7\ln 3\ .
\end{aligned}
$$

不定積分を計算してもよい. 積分定数を C とおく.

$$
\int\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx = \int\frac{x}{8}\,dx+\int\frac{7}{x}\,dx = \frac{1}{8}\int x\,dx+7\int\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{16}+7\ln|x|+C\ .
$$

$$
\begin{aligned}
\int_2^6\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{x}\right)dx &= \left[\frac{x^2}{16}+7\ln|x|\right]_2^6 = \frac{36}{16}+7\ln 6-\frac{4}{16}-7\ln 2 \\
&= \frac{9}{4}-\frac{1}{4}+7(\ln 6-\ln 2) \\
&= 2+7\ln 3\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問6.8.1}$ 定積分 $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x-4\sin x}{3}\,dx$ を計算せよ．

$$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x-4\sin x}{3}\,dx = \quad\Big(\int_{\pi}^{2\pi}\quad dx - \quad\int_{\pi}^{2\pi}\qquad dx\Big)$$

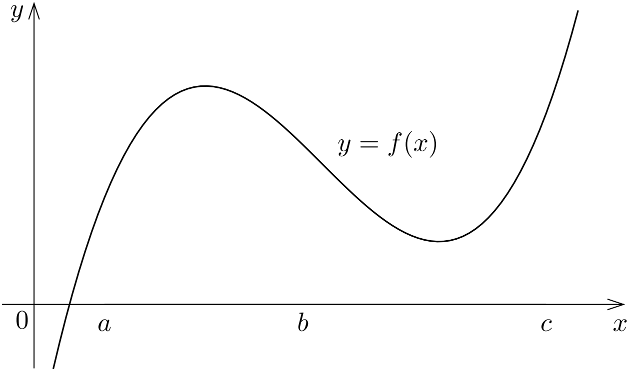
$$= \quad\Big\{\Big[\qquad\Big]_{\pi}^{2\pi} - \quad\Big[\qquad\qquad\Big]_{\pi}^{2\pi}\Big\}$$

$\boxed{問6.8.1}$ 定積分 $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x-4\sin x}{3}\,dx$ を計算せよ.

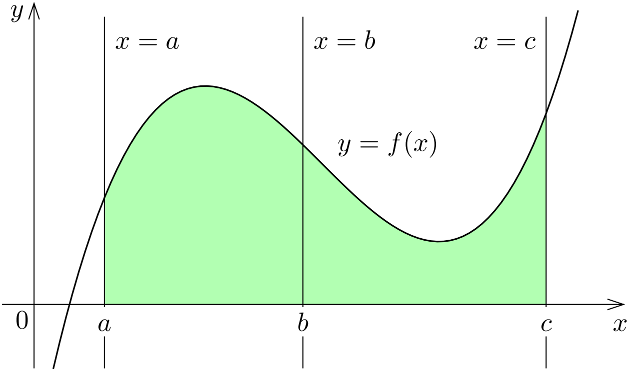
$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x-4\sin x}{3}\,dx &= \frac{1}{3}\left(\int_{\pi}^{2\pi}x\,dx-4\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx\right)\\ &= \frac{1}{3}\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\pi}^{2\pi}-4\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}\\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{4\pi^2-\pi^2}{2}-4\{-1+(-1)\}\right]\\ &= \frac{\pi^2}{2}+\frac{8}{3}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

実数 a,b,c について $a \leq b \leq c$ とする．また，関数 f は a から c まで積分可能であり，区間 $[a,c]$ の各実数 x について $f(x) \geq 0$ とする．

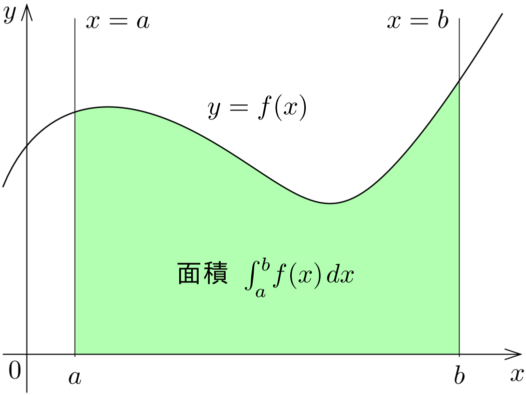


実数 a,b,c について $a \leq b \leq c$ とする．また，関数 f は a から c まで積分可能であり，区間 $[a,c]$ の各実数 x について $f(x) \geq 0$ とする．右図のように，xy 座標平面において，$y=f(x)$ のグラフと直線 $x=a$ と $x=c$ と x 軸とで囲まれる領域を，直線 $x=b$ で仕切る．

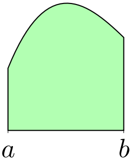


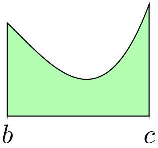
定理 **6.1.4** により次のことが成り立つ.

[定理 **6.1.4**]　実数 a, b について $a \leq b$ とする. 関数 f は区間 $[a,b]$ において連続であり, 区間 $[a,b]$ において $f(x) \geq 0$ とする. xy 座標平面において, $y = f(x)$ のグラフと x 軸と直線 $x = a$ と $x = b$ とで囲まれる領域の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$ である.



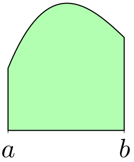
定理 **6.1.4** により次のことが成り立つ.

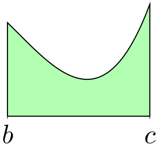
領域 

の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$，領域 

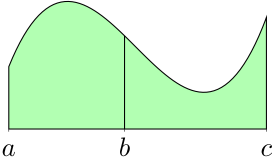
の面積は $\int_b^c f(x)\,dx$，

定理 **6.1.4** により次のことが成り立つ．

領域 

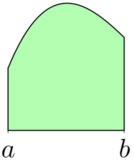
の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$， 領域 

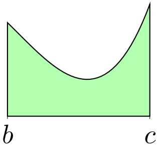
の面積は $\int_b^c f(x)\,dx$，

この 2 個の領域を併せた領域 

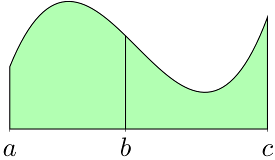
の面積は $\int_a^c f(x)\,dx$ ．

定理 **6.1.4** により次のことが成り立つ.

領域 

の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$ ， 領域 

の面積は $\int_b^c f(x)\,dx$ ，

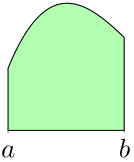
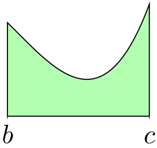
この 2 個の領域を併せた領域 

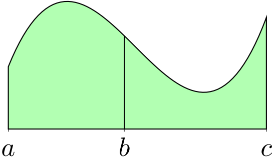
の面積は $\int_a^c f(x)\,dx$.

このことから次の等式が成り立つ：

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \ .$$

定理 **6.1.4** により次のことが成り立つ．

領域  の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$ ， 領域  の面積は $\int_b^c f(x)\,dx$ ，

この 2 個の領域を併せた領域  の面積は $\int_a^c f(x)\,dx$ ．

このことから次の等式が成り立つ：

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \ .$$

この等式は実数 a, b, c の大小関係に関わらず成り立つ．

[定理 6.8.3]　実数 a, b, c に対して，関数 f が a から b まで積分可能でありかつ b から c まで積分可能であるとき，f は a から c まで積分可能であり，

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \ .$$

[定理 6.8.3]　実数 a, b, c に対して，関数 f が a から b まで積分可能でありかつ b から c まで積分可能であるとき，f は a から c まで積分可能であり，

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \ .$$

　実数 a, b, c について $a \leq b \leq c$ で，関数 f が a から b まで積分可能でありかつ b から c まで積分可能であるとする．次のことを示す：

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \ .$$

正の各実数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = c$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める. S_n は a 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和である.

次のような正の自然数 l をとる： $l < n$ で，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{l-1} \leq \xi_l \leq x_l \leq b \ ,$$

$$b \leq \xi_{l+1} \leq x_{l+1} \leq \xi_{l+2} \leq x_{l+2} \leq \xi_{l+3} \leq x_{l+3} \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = c \ .$$

次のような正の自然数 l をとる： $l < n$ で，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{l-1} \le \xi_l \le x_l \le b \ ,$$

$$b \le \xi_{l+1} \le x_{l+1} \le \xi_{l+2} \le x_{l+2} \le \xi_{l+3} \le x_{l+3} \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = c \ .$$

$m = n - l$ ， $j = k - l$ とおく．変数 k の値が $l+1$ から n までの自然数であるとき変数 j の値は 1 から $n-l = m$ までの自然数である．

次のような正の自然数 l をとる：$l<n$ で,

$$a=x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{l-1} \le \xi_l \le x_l \le b \ ,$$

$$b \le \xi_{l+1} \le x_{l+1} \le \xi_{l+2} \le x_{l+2} \le \xi_{l+3} \le x_{l+3} \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = c \ .$$

$m=n-l$ ， $j=k-l$ とおく．変数 k の値が $l+1$ から n までの自然数であるとき変数 j の値は 1 から $n-l=m$ までの自然数である．

$$T_l=\sum_{k=1}^{l}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

$$U_m=\sum_{k=l+1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{j=1}^{m}\{f(\xi_{l+j})(x_{l+j}-x_{l+j-1})\}$$

と定める．T_l は a 以上 b 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和であり，U_m は b 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和である．

次のような正の自然数 l をとる： $l<n$ で，

$$a=x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{l-1} \leq \xi_l \leq x_l \leq b \ ,$$

$$b \leq \xi_{l+1} \leq x_{l+1} \leq \xi_{l+2} \leq x_{l+2} \leq \xi_{l+3} \leq x_{l+3} \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = c \ .$$

$m=n-l$ ， $j=k-l$ とおく．変数 k の値が $l+1$ から n までの自然数であるとき変数 j の値は 1 から $n-l=m$ までの自然数である．

$$T_l = \sum_{k=1}^{l} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \ ,$$

$$U_m = \sum_{k=l+1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{j=1}^{m} \{f(\xi_{l+j})(x_{l+j} - x_{l+j-1})\}$$

と定める．T_l は a 以上 b 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和であり，U_m は b 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和である．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{l} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} + \sum_{k=l+1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$
$$= T_l + U_m \ .$$

a 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 S_n を，a 以上 b 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 T_l と b 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 U_m とに分けることができて，

$$S_n = T_l + U_m \quad .$$

a 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 S_n を，a 以上 b 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 T_l と b 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 U_m とに分けることができて，

$$S_n = T_l + U_m \ .$$

$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする．関数 $f(x)$ が a から b まで積分可能でありかつ b から c まで積分可能であるので，

$$\lim_{l\to\infty} T_l = \int_a^b f(x)\,dx \ , \qquad \lim_{m\to\infty} U_m = \int_b^c f(x)\,dx \ .$$

a 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 S_n を，a 以上 b 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 T_l と b 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 U_m とに分けることができて，

$$S_n = T_l + U_m \ .$$

$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする．関数 $f(x)$ が a から b まで積分可能でありかつ b から c まで積分可能であるので，

$$\lim_{l\to\infty} T_l = \int_a^b f(x)\,dx \ , \qquad \lim_{m\to\infty} U_m = \int_b^c f(x)\,dx \ .$$

故に

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{l,m\to\infty} (T_l + U_m) = \lim_{l\to\infty} T_l + \lim_{m\to\infty} U_m \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

つまり $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ ．

[定理 6.8.4]　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f と g とは a から b まで積分可能であるとする．区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ ならば，

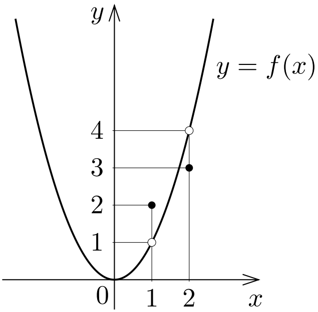
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

証明は省く．

例として関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (\ x \neq 1 \ \text{かつ} \ x \neq 2 \ \text{のとき}) \\ 2 & (\ x = 1 \ \text{のとき}) \\ 3 & (\ x = 2 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

$x = 1$ のときと $x = 2$ のときだけ $f(x) \neq x^2$ で，それ以外のときは $f(x) = x^2$ ．



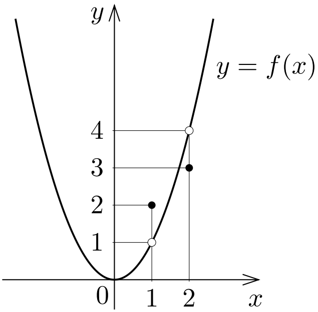
例として関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (\ x \neq 1 \ \text{かつ} \ x \neq 2 \ \text{のとき}) \\ 2 & (\ x = 1 \ \text{のとき}) \\ 3 & (\ x = 2 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

$x = 1$ のときと $x = 2$ のときだけ $f(x) \neq x^2$ で，それ以外のときは $f(x) = x^2$ ．このとき，定積分 $\int_0^3 f(x)\,dx$ と $\int_0^3 x^2\,dx$ とは等しい：

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{3}3^3 - 0$$

$$= 9 \ .$$



一般的にいうと次のようになる：関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 g について，区間 $[a,b]$ の有限個の実数 $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ を除く $[a,b]$ の各実数 x について $g(x) = f(x)$ ならば，つまり，$a \leq x \leq b$ である実数 x について $x \neq c_1$ ，$x \neq c_2$ ，$x \neq c_3$ ，$\cdots$ ，$x \neq c_n$ のとき $g(x) = f(x)$ ならば，$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ．

一般的にいうと次のようになる：関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 g について，区間 $[a,b]$ の有限個の実数 $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ を除く $[a,b]$ の各実数 x について $g(x) = f(x)$ ならば，つまり，$a \leq x \leq b$ である実数 x について $x \neq c_1$ ，$x \neq c_2$ ，$x \neq c_3$ ，$\cdots$ ，$x \neq c_n$ のとき $g(x) = f(x)$ ならば，$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ．

[定理 6.8.5]　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f は a から b まで積分可能であるとする．関数 g について，区間 $[a,b]$ の有限個の実数を除く $[a,b]$ の各実数 x について $g(x) = f(x)$ ならば，g は a から b まで積分可能であり，$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ．

証明は省く．

例 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} 3^x & (\ x \neq 2\ \text{のとき}) \\ 5 & (\ x = 2\ \text{のとき}) \end{cases} .$$

g の定積分 $\int_0^4 g(x)\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} 3^x & (\ x \neq 2 \ \text{のとき}) \\ 5 & (\ x = 2 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

g の定積分 $\int_0^4 g(x)\,dx$ を計算する． $0 \leq x \leq 4$ である各実数 x について $x \neq 2$ のとき $g(x) = 3^x$ なので， $\int_0^4 g(x)\,dx = \int_0^4 3^x dx$ ．

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} 3^x & (\ x \neq 2\ \text{のとき}) \\ 5 & (\ x = 2\ \text{のとき}) \end{cases} .$$

g の定積分 $\int_0^4 g(x)\,dx$ を計算する． $0 \leq x \leq 4$ である各実数 x について $x \neq 2$ のとき $g(x) = 3^x$ なので， $\int_0^4 g(x)\,dx = \int_0^4 3^x dx$ ． $\int_0^4 3^x dx$ を計算する：

$$\int_0^4 3^x dx = \left[\frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^4 = \frac{3^4 - 1}{\ln 3} = \frac{80}{\ln 3} .$$

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} 3^x & (\ x \neq 2 \ \text{のとき}) \\ 5 & (\ x = 2 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

g の定積分 $\int_0^4 g(x)\,dx$ を計算する．$0 \leq x \leq 4$ である各実数 x について $x \neq 2$ のとき $g(x) = 3^x$ なので，$\int_0^4 g(x)\,dx = \int_0^4 3^x dx$ ．$\int_0^4 3^x dx$ を計算する：

$$\int_0^4 3^x dx = \left[\frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^4 = \frac{3^4 - 1}{\ln 3} = \frac{80}{\ln 3} .$$

故に $\int_0^4 g(x)\,dx = \dfrac{80}{\ln 3}$ ． $\boxed{終}$

$\boxed{問 6.8.2}$ 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2x^2+6} & (\ x \neq 2\ \text{のとき}) \\ 7 & (\ x = 2\ \text{のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_1^3 g(x)\,dx$ を計算せよ.

$x \neq 2$ のとき $g(x) = \dfrac{9}{2x^2+6}$ なので,

$$\int_1^3 g(x)\,dx =$$

$\boxed{\text{問}6.8.2}$ 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2x^2+6} & (\ x \neq 2 \ \text{のとき}) \\ 7 & (\ x = 2 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_1^3 g(x)\,dx$ を計算せよ．

$x \neq 2$ のとき $g(x) = \dfrac{9}{2x^2+6}$ なので，

$$\int_1^3 g(x)\,dx = \int_1^3 \frac{9}{2x^2+6}\,dx = \frac{9}{2}\int_1^3 \frac{1}{x^2+3}\,dx$$

$\boxed{\text{問}6.8.2}$ 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2x^2+6} & (\ x \neq 2 \ \text{のとき}) \\ 7 & (\ x = 2 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_1^3 g(x)\,dx$ を計算せよ.

$x \neq 2$ のとき $g(x) = \dfrac{9}{2x^2+6}$ なので,

$$\begin{aligned} \int_1^3 g(x)\,dx &= \int_1^3 \frac{9}{2x^2+6}\,dx = \frac{9}{2}\int_1^3 \frac{1}{x^2+3}\,dx \\ &= \frac{9}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_1^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{4} \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 関数 f について，$3 < x < 7$ のとき $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とする．定積分 $\int_3^7 f(x)\,dx$ を計算する．

$\boxed{\text{例}}$ 関数 f について, $3 < x < 7$ のとき $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とする. 定積分 $\int_3^7 f(x)\,dx$ を計算する. $3 \leq x \leq 7$ である各実数 x について, $x \neq 3$, $x \neq 7$ のとき $f(x) = \dfrac{1}{x}$ なので, $\int_3^7 f(x)\,dx = \displaystyle\int_3^7 \frac{1}{x}\,dx$.

$\boxed{\text{例}}$ 関数 f について，$3 < x < 7$ のとき $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とする．定積分 $\int_3^7 f(x)\,dx$ を計算する．$3 \leq x \leq 7$ である各実数 x について，$x \neq 3$，$x \neq 7$ のとき $f(x) = \dfrac{1}{x}$ なので，$\int_3^7 f(x)\,dx = \displaystyle\int_3^7 \frac{1}{x}\,dx$．よって，

$$\int_3^7 f(x)\,dx = \int_3^7 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_3^7 = \ln 7 - \ln 3 = \ln \frac{7}{3}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}6.8.3}$ 関数 f について， $0 < x < \dfrac{3}{2}$ のとき $f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{6-2x^2}}$ とする．定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx$ を計算せよ．

$0 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ である各実数 x について， $x \neq 0$ ， $x \neq \dfrac{3}{2}$ のとき $f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{6-2x^2}}$ なので，

$$\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx$$

$\boxed{問6.8.3}$ 関数 f について，$0 < x < \dfrac{3}{2}$ のとき $f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{6-2x^2}}$ とする．定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx$ を計算せよ．

$0 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ である各実数 x について，$x \neq 0$ ，$x \neq \dfrac{3}{2}$ のとき $f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{6-2x^2}}$ なので，

$$\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{5}{6-2x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2(3-x^2)}}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$$

$\boxed{問6.8.3}$ 関数 f について，$0 < x < \dfrac{3}{2}$ のとき $f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{6-2x^2}}$ とする．定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx$ を計算せよ．

$0 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ である各実数 x について，$x \neq 0$，$x \neq \dfrac{3}{2}$ のとき $f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{6-2x^2}}$ なので，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx &= \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{5}{6-2x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2(3-x^2)}}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\,dx \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}\left[\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1}0\right) = \frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{10}\,\pi}{6}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

例 実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & (\ x \leq 5 \ \text{のとき}) \\ \sin 5 & (\ x > 5 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx$ を計算する．

例　実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & （\ x \leq 5 \ \text{のとき}） \\ \sin 5 & （\ x > 5 \ \text{のとき}） \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx$ を計算する.

$$\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx = \int_0^5 \psi(x)\,dx + \int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & (\ x \leq 5 \ \text{のとき}) \\ \sin 5 & (\ x > 5 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx$ を計算する．

$$\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx = \int_0^5 \psi(x)\,dx + \int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx \ .$$

$\int_0^5 \psi(x)\,dx$ 及び $\int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx$ を計算する．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & (\ x \leq 5 \ \text{のとき}) \\ \sin 5 & (\ x > 5 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx$ を計算する．

$$\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx = \int_0^5 \psi(x)\,dx + \int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx \ .$$

$\int_0^5 \psi(x)\,dx$ 及び $\int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx$ を計算する． $0 \leq x \leq 5$ である各実数 x について $\psi(x) = \cos x$ なので，

$$\int_0^5 \psi(x)\,dx = \int_0^5 \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^5 = \sin 5 - \sin 0 = \sin 5 \ .$$

例 実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & (\ x \leq 5 \ \text{のとき}) \\ \sin 5 & (\ x > 5 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx$ を計算する.

$$\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx = \int_0^5 \psi(x)\,dx + \int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx \ .$$

$\int_0^5 \psi(x)\,dx$ 及び $\int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx$ を計算する. $0 \leq x \leq 5$ である各実数 x について $\psi(x) = \cos x$ なので,

$$\int_0^5 \psi(x)\,dx = \int_0^5 \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^5 = \sin 5 - \sin 0 = \sin 5 \ .$$

$5 \leq x \leq 2\pi$ である実数 x について $x \neq 5$ のとき $\psi(x) = \sin 5$ なので,

$$\int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx = \int_5^{2\pi} \sin 5\,dx = (\sin 5) \int_5^{2\pi} 1\,dx = (\sin 5)\Big[x\Big]_5^{2\pi} = (2\pi - 5)\sin 5 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & (\ x \leq 5 \ \text{のとき}) \\ \sin 5 & (\ x > 5 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx$ を計算する．

$$\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx = \int_0^5 \psi(x)\,dx + \int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx \ .$$

$\int_0^5 \psi(x)\,dx$ 及び $\int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx$ を計算する． $0 \leq x \leq 5$ である各実数 x について $\psi(x) = \cos x$ なので，

$$\int_0^5 \psi(x)\,dx = \int_0^5 \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^5 = \sin 5 - \sin 0 = \sin 5 \ .$$

$5 \leq x \leq 2\pi$ である実数 x について $x \neq 5$ のとき $\psi(x) = \sin 5$ なので，

$$\int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx = \int_5^{2\pi} \sin 5\,dx = (\sin 5)\int_5^{2\pi} 1\,dx = (\sin 5)\Big[x\Big]_5^{2\pi} = (2\pi - 5)\sin 5 \ .$$

従って，

$$\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx = \int_0^5 \psi(x)\,dx + \int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx = \sin 5 + (2\pi - 5)\sin 5 = (2\pi - 4)\sin 5 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}6.8.4}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & (\ x \leq 2\ \text{のとき}) \\ \cos 2 & (\ x > 2\ \text{のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^\pi \varphi(x)\,dx$ を計算せよ.

$$\int_0^\pi \varphi(x)\,dx = \int_0^2 \varphi(x)\,dx + \int_2^\pi \varphi(x)\,dx\ .$$

$$\int_0^2 \varphi(x)\,dx = \int_0^2 \qquad dx =$$

$$\int_2^\pi \varphi(x)\,dx = \int_2^\pi \qquad dx =$$

よって

$$\int_0^\pi \varphi(x)\,dx = \int_0^2 \varphi(x)\,dx + \int_2^\pi \varphi(x)\,dx =$$

$\boxed{問6.8.4}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & (\ x \leq 2\ \text{のとき}) \\ \cos 2 & (\ x > 2\ \text{のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^\pi \varphi(x)\,dx$ を計算せよ.

$$\int_0^\pi \varphi(x)\,dx = \int_0^2 \varphi(x)\,dx + \int_2^\pi \varphi(x)\,dx\ .$$

$$\int_0^2 \varphi(x)\,dx = \int_0^2 \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^2 = -\cos 2 + \cos 0 = 1 - \cos 2\ .$$

$$\int_2^\pi \varphi(x)\,dx = \int_2^\pi \cos 2\,dx = (\cos 2)\int_2^\pi 1\,dx = (\cos 2)\Big[x\Big]_2^\pi = (\pi - 2)\cos 2\ .$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi(x)\,dx &= \int_0^2 \varphi(x)\,dx + \int_2^\pi \varphi(x)\,dx = 1 - \cos 2 + (\pi - 2)\cos 2 \\ &= 1 + (\pi - 3)\cos 2\ . \end{aligned}$$

$\boxed{終}$

変数 x の関数 $f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ の定積分を計算するためには，$f(x) \geq 0$ である x の値の範囲と $f(x) \leq 0$ である x の値の範囲とに分けて定積分する．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5|\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5|\,dx$ を計算する．$0 \leq x \leq 3$ である実数 x について，$e^x - 5 = 0$ とすると $x = \qquad$ ．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5|\,dx$ を計算する． $0 \leq x \leq 3$ である実数 x について，
$e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$ ．

$\boxed{\text{例}}$　定積分 $\int_0^3 |e^x - 5|\,dx$ を計算する． $0 \leq x \leq 3$ である実数 x について，$e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$ ．

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき， $e^x \leq e^{\ln 5} = 5$ ， $e^x - 5 \leq 0$ ， $|e^x - 5| =$ 　　　　．

$\boxed{\text{例}}$　定積分 $\int_0^3 |e^x - 5|\,dx$ を計算する． $0 \leq x \leq 3$ である実数 x について，$e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$ ．

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき， $e^x \leq e^{\ln 5} = 5$ ， $e^x - 5 \leq 0$ ， $|e^x - 5| = 5 - e^x$ ．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 |e^x-5|\,dx$ を計算する． $0 \leq x \leq 3$ である実数 x について，$e^x-5=0$ とすると $x=\ln 5$ ．

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき， $e^x \leq e^{\ln 5}=5$ ， $e^x-5 \leq 0$ ， $|e^x-5|=5-e^x$ ．

$\ln 5 \leq x \leq 3$ のとき， $e^x \geq e^{\ln 5}=5$ ， $e^x-5 \geq 0$ ， $|e^x-5|=$ 　　　　　．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5| dx$ を計算する． $0 \leq x \leq 3$ である実数 x について，
$e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$ ．

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき， $e^x \leq e^{\ln 5} = 5$ ， $e^x - 5 \leq 0$ ， $|e^x - 5| = 5 - e^x$ ．

$\ln 5 \leq x \leq 3$ のとき， $e^x \geq e^{\ln 5} = 5$ ， $e^x - 5 \geq 0$ ， $|e^x - 5| = e^x - 5$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5|\,dx$ を計算する． $0 \leq x \leq 3$ である実数 x について，$e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$ ．

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき， $e^x \leq e^{\ln 5} = 5$ ， $e^x - 5 \leq 0$ ， $|e^x - 5| = 5 - e^x$ ．

$\ln 5 \leq x \leq 3$ のとき， $e^x \geq e^{\ln 5} = 5$ ， $e^x - 5 \geq 0$ ， $|e^x - 5| = e^x - 5$ ．

これより，

$$\begin{aligned}\int_0^3 |e^x - 5|\,dx &= \int_0^{\ln 5} |e^x - 5|\,dx + \int_{\ln 5}^3 |e^x - 5|\,dx \\ &= \int_0^{\ln 5} (5 - e^x)\,dx + \int_{\ln 5}^3 (e^x - 5)\,dx\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5|\,dx$ を計算する． $0 \leq x \leq 3$ である実数 x について，$e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$ ．

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき， $e^x \leq e^{\ln 5} = 5$ ， $e^x - 5 \leq 0$ ， $|e^x - 5| = 5 - e^x$ ．

$\ln 5 \leq x \leq 3$ のとき， $e^x \geq e^{\ln 5} = 5$ ， $e^x - 5 \geq 0$ ， $|e^x - 5| = e^x - 5$ ．

これより，

$$\begin{aligned}\int_0^3 |e^x - 5|\,dx &= \int_0^{\ln 5} |e^x - 5|\,dx + \int_{\ln 5}^3 |e^x - 5|\,dx \\ &= \int_0^{\ln 5} (5 - e^x)\,dx + \int_{\ln 5}^3 (e^x - 5)\,dx \\ &= [5x - e^x]_0^{\ln 5} + [e^x - 5x]_{\ln 5}^3\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5|\, dx$ を計算する．$0 \leq x \leq 3$ である実数 x について，$e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$ ．

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき，$e^x \leq e^{\ln 5} = 5$ ，$e^x - 5 \leq 0$ ，$|e^x - 5| = 5 - e^x$ ．

$\ln 5 \leq x \leq 3$ のとき，$e^x \geq e^{\ln 5} = 5$ ，$e^x - 5 \geq 0$ ，$|e^x - 5| = e^x - 5$ ．

これより，

$$\begin{aligned}\int_0^3 |e^x - 5|\, dx &= \int_0^{\ln 5} |e^x - 5|\, dx + \int_{\ln 5}^3 |e^x - 5|\, dx \\ &= \int_0^{\ln 5} (5 - e^x)\, dx + \int_{\ln 5}^3 (e^x - 5)\, dx \\ &= [5x - e^x]_0^{\ln 5} + [e^x - 5x]_{\ln 5}^3 \\ &= 5\ln 5 - e^{\ln 5} + e^0 + e^3 - 15 - e^{\ln 5} + 5\ln 5 \\ &= 5\ln 5 - 5 + 1 + e^3 - 15 - 5 + 5\ln 5 \qquad e^{\ln 5} = 5\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5|\,dx$ を計算する． $0 \leq x \leq 3$ である実数 x について，
$e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$ ．

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき， $e^x \leq e^{\ln 5} = 5$ ， $e^x - 5 \leq 0$ ， $|e^x - 5| = 5 - e^x$ ．

$\ln 5 \leq x \leq 3$ のとき， $e^x \geq e^{\ln 5} = 5$ ， $e^x - 5 \geq 0$ ， $|e^x - 5| = e^x - 5$ ．

これより，

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 |e^x - 5|\,dx &= \int_0^{\ln 5} |e^x - 5|\,dx + \int_{\ln 5}^3 |e^x - 5|\,dx \\
&= \int_0^{\ln 5} (5 - e^x)\,dx + \int_{\ln 5}^3 (e^x - 5)\,dx \\
&= [5x - e^x]_0^{\ln 5} + [e^x - 5x]_{\ln 5}^3 \\
&= 5\ln 5 - e^{\ln 5} + e^0 + e^3 - 15 - e^{\ln 5} + 5\ln 5 \\
&= 5\ln 5 - 5 + 1 + e^3 - 15 - 5 + 5\ln 5 \\
&= e^3 + 10\ln 5 - 24 \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}6.8.5}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx$ を計算せよ.

$0 \leq x \leq \pi$ である実数 x について, $\cos x-\dfrac{1}{2}=0$ とすると $x=$ 　　.

$0 \leq x \leq$ 　　 のとき, $\cos x$ 　 $\dfrac{1}{2}$, $\cos x-\dfrac{1}{2}$ 　 0 . $\left|\cos x-\dfrac{1}{2}\right|=$ 　　　　　　.

　　 $\leq x \leq \pi$ のとき, $\cos x$ 　 $\dfrac{1}{2}$, $\cos x-\dfrac{1}{2}$ 　 0 , $\left|\cos x-\dfrac{1}{2}\right|=$ 　　　　　　.

$$\int_0^{\pi}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx=\int_0^{\quad}\Big(\qquad\qquad\Big)dx+\int^{\pi}\Big(\qquad\qquad\Big)dx$$

$$=$$

$\boxed{問6.8.5}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx$ を計算せよ.

$0\leq x\leq\pi$ である実数 x について, $\cos x-\dfrac{1}{2}=0$ とすると $x=\dfrac{\pi}{3}$.

$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{3}$ のとき, $\cos x\geq\dfrac{1}{2}$, $\cos x-\dfrac{1}{2}\geq 0$, $\left|\cos x-\dfrac{1}{2}\right|=\cos x-\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{\pi}{3}\leq x\leq\pi$ のとき, $\cos x\leq\dfrac{1}{2}$, $\cos x-\dfrac{1}{2}\leq 0$, $\left|\cos x-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}-\cos x$.

$$\int_0^{\pi}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx=\int_0\left(\qquad\qquad\right)dx+\int^{\pi}\left(\qquad\qquad\right)dx$$

$$=$$

$\boxed{問6.8.5}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx$ を計算せよ.

$0\leq x\leq\pi$ である実数 x について, $\cos x-\dfrac{1}{2}=0$ とすると $x=\dfrac{\pi}{3}$.

$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{3}$ のとき, $\cos x\geq\dfrac{1}{2}$, $\cos x-\dfrac{1}{2}\geq 0$, $\left|\cos x-\dfrac{1}{2}\right|=\cos x-\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{\pi}{3}\leq x\leq\pi$ のとき, $\cos x\leq\dfrac{1}{2}$, $\cos x-\dfrac{1}{2}\leq 0$, $\left|\cos x-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}-\cos x$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)dx\\&=\left[\sin x-\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{x}{2}-\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\end{aligned}$$

$\boxed{問6.8.5}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx$ を計算せよ．

$0\leq x\leq\pi$ である実数 x について，$\cos x-\dfrac{1}{2}=0$ とすると $x=\dfrac{\pi}{3}$ ．

$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos x\geq\dfrac{1}{2}$ ，$\cos x-\dfrac{1}{2}\geq 0$ ，$\left|\cos x-\dfrac{1}{2}\right|=\cos x-\dfrac{1}{2}$ ．

$\dfrac{\pi}{3}\leq x\leq\pi$ のとき，$\cos x\leq\dfrac{1}{2}$ ，$\cos x-\dfrac{1}{2}\leq 0$ ，$\left|\cos x-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}-\cos x$ ．

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)dx \\
&= \left[\sin x-\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{x}{2}-\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$