6.7 定積分と不定積分

関数 F の定義域に属す実数 a と b とに対し，$F(b)-F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$ と書き表す：

$$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a) \ .$$

関数 F の定義域に属す実数 a と b とに対し，$F(b)-F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$ と書き表す：

$$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a) \ .$$

変数 x に代入することが明らかなときは，$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$ を単に $\Big[F(x)\Big]_{a}^{b}$ と略す：

$$\Big[F(x)\Big]_{a}^{b} = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a) \ .$$

関数 F の定義域に属す実数 a と b とに対し，$F(b)-F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$ と書き表す：

$$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)\ .$$

変数 x に代入することが明らかなときは，$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$ を単に $\Big[F(x)\Big]_{a}^{b}$ と略す：

$$\Big[F(x)\Big]_{a}^{b} = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)\ .$$

例えば次のようになる.

$$\Big[\cos x\Big]_2^5 = \Big[\cos x\Big]_{x=2}^{x=5} = \cos 5 - \cos 2\ .$$

$$\Big[x^2-3x\Big]_2^{-1} = \Big[x^2-3x\Big]_{x=2}^{x=-1} = (-1)^2 - 3\cdot(-1) - (2^2 - 3\cdot 2) = 6\ .$$

例えば，$\Big[\sin x+5\Big]_{x=3}^{x=7}$ は $\Big[\sin x\Big]_{x=3}^{x=7}$ と等しい：

$$\Big[\sin x+5\Big]_{x=3}^{x=7} = \sin 7+5-(\sin 3+5) = \sin 7-\sin 3 = \Big[\sin x\Big]_{x=3}^{x=7} .$$

例えば，$\Big[\sin x + 5\Big]_{x=3}^{x=7}$ は $\Big[\sin x\Big]_{x=3}^{x=7}$ と等しい：

$$\Big[\sin x + 5\Big]_{x=3}^{x=7} = \sin 7 + 5 - (\sin 3 + 5) = \sin 7 - \sin 3 = \Big[\sin x\Big]_{x=3}^{x=7} .$$

一般的に述べる：関数 F の定義域に属す定数 a と b 及び，変数 x と無関係な定数 C について，

$$\Big[F(x) + C\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) + C - \{F(a) + C\} = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} .$$

関数 f の定積分は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．

関数 f の定積分は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．それ故，定積分を計算するには多くの場合**6.3**節において述べた次の微分積分の基本定理を用いる：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属すある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ ．

関数 f の定積分は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．それ故，定積分を計算するには多くの場合**6.3**節において述べた次の微分積分の基本定理を用いる：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属すある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ．

実数 a と b とが属すある区間を定義域とする関数 f は連続であるとする．

関数 f の定積分は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．それ故，定積分を計算するには多くの場合**6.3**節において述べた次の微分積分の基本定理を用いる：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属する区間において関数 F が微分可能で $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ．

実数 a と b とが属する区間を定義域とする関数 f は連続であるとする．定理**6.1.3**により f は a から b まで積分可能である．

関数 f の定積分は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．それ故，定積分を計算するには多くの場合**6.3**節において述べた次の微分積分の基本定理を用いる：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属すある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ．

実数 a と b とが属すある区間を定義域とする関数 f は連続であるとする．定理**6.1.3**により f は a から b まで積分可能である．定理**6.4.5**により f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ がある．

関数 f の定積分は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．それ故，定積分を計算するには多くの場合**6.3**節において述べた次の微分積分の基本定理を用いる：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属すある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ ．

実数 a と b とが属すある区間を定義域とする関数 f は連続であるとする．定理**6.1.3**により f は a から b まで積分可能である．定理**6.4.5**により f の不定積分 $\int f(x)dx$ がある．関数 F を $F(x)=\int f(x)dx$ とおく．

関数 f の定積分は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．それ故，定積分を計算するには多くの場合 **6.3** 節において述べた次の微分積分の基本定理を用いる：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属すある区間において関数 F が微分可能で $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ ．

実数 a と b とが属すある区間を定義域とする関数 f は連続であるとする．定理 **6.1.3** により f は a から b まで積分可能である．定理 **6.4.5** により f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ がある．関数 F を $F(x)=\int f(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により $\dfrac{d}{dx}F(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$ なので，

関数 f の定積分は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．それ故，定積分を計算するには多くの場合 **6.3** 節において述べた次の微分積分の基本定理を用いる：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属すある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ ．

実数 a と b とが属すある区間を定義域とする関数 f は連続であるとする．定理 **6.1.3** により f は a から b まで積分可能である．定理 **6.4.5** により f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ がある．関数 F を $F(x)=\int f(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により $\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$ なので，微積分の基本定理により，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

関数 f の定積分は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．それ故，定積分を計算するには多くの場合**6.3**節において述べた次の微分積分の基本定理を用いる：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属すある区間において関数 F が微分可能で $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ ．

実数 a と b とが属すある区間を定義域とする関数 f は連続であるとする．定理**6.1.3**により f は a から b まで積分可能である．定理**6.4.5**により f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ がある．関数 F を $F(x)=\int f(x)\,dx$ とおく．定理**6.4.3**により $\dfrac{d}{dx}F(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$ なので，微積分の基本定理により，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=b} .$$

関数 f の定積分は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．それ故，定積分を計算するには多くの場合**6.3**節において述べた次の微分積分の基本定理を用いる：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属する区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ．

実数 a と b とが属する区間を定義域とする関数 f は連続であるとする．定理**6.1.3**により f は a から b まで積分可能である．定理**6.4.5**により f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ がある．関数 F を $F(x) = \int f(x)\,dx$ とおく．定理**6.4.3**により $\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = f(x)$ なので，微積分の基本定理により，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=b} .$$

[定理**6.7**]　実数 a と b とが属する区間において関数 f が連続であるとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=b} .$$

[定理 **6.7**] 実数 a と b とが属するある区間において関数 f が連続であるとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=a}^{x=b} .$$

関数 f の定積分は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．そのため定積分を計算するには大抵の場合この定理 **6.7** を用いる．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_4^9 \cos x\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_4^9 \cos x\,dx$ を計算する． $\int \cos x\,dx = \sin x + C$（ C は積分定数）
なので，

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_4^9 \cos x\,dx$ を計算する． $\int \cos x\,dx = \sin x + C$（ C は積分定数）なので，

$$\int_4^9 \cos x\,dx = \left[\int \cos x\,dx\right]_4^9 = \left[\sin x + C\right]_4^9 = \left[\sin x\right]_4^9$$

関数 F の定義域に属す実数 a, b 及び定数 C に対して $\left[F(x) + C\right]_a^b = \left[F(x)\right]_a^b$.

$\boxed{\text{例}}$　定積分 $\int_4^9 \cos x\,dx$ を計算する． $\int \cos x\,dx = \sin x + C$（$C$ は積分定数）なので，

$$\int_4^9 \cos x\,dx = \left[\int \cos x\,dx\right]_4^9 = \left[\sin x + C\right]_4^9 = \left[\sin x\right]_4^9$$
$$= \sin 9 - \sin 4\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例　定積分 $\int_4^9 \cos x\,dx$ を計算する． $\int \cos x\,dx = \sin x + C$（ C は積分定数）なので，

$$\int_4^9 \cos x\,dx = \left[\int \cos x\,dx\right]_4^9 = \left[\sin x + C\right]_4^9 = \left[\sin x\right]_4^9$$
$$= \sin 9 - \sin 4\ .$$

終

　このように，定積分の計算において不定積分の積分定数 C は相殺されて消えてしまうので，積分定数は定積分の計算結果に影響しない．なので，定積分の計算において，普通は不定積分の積分定数を省く．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2}(y^2-3y+2)\,dy$ を計算する．積分定数を C とおく．

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_{-1}^{2}(y^2-3y+2)\,dy$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int(y^2-3y+2)\,dy = \frac{1}{3}y^3-3\frac{1}{2}y^2+2y+C = \frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+2y+C \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2}(y^2-3y+2)\,dy$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int(y^2-3y+2)\,dy = \frac{1}{3}y^3-3\frac{1}{2}y^2+2y+C = \frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+2y+C \ .$$

定積分の計算では不定積分の積分定数を省いてよい．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2}(y^2-3y+2)\,dy$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int(y^2-3y+2)\,dy = \frac{1}{3}y^3-3\frac{1}{2}y^2+2y+C = \frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+2y+C\ .$$

定積分の計算では不定積分の積分定数を省いてよい．

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(y^2-3y+2)\,dy &= \left[\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+2y\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3}-6+4-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-2\right)\\ &= \frac{9}{2}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 6.7.1}$ 定積分 $\int_{-2}^{4}(2y^2-5y+3)\,dy$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int(2y^2-5y+3)\,dy =$$

よって,

$$\int_{-2}^{4}(2y^2-5y+3)\,dy = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad \Big]_{-2}^{4}$$

$\boxed{問 6.7.1}$ 定積分 $\int_{-2}^{4}(2y^2-5y+3)\,dy$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int(2y^2-5y+3)\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}y^3-5\cdot\frac{1}{2}y^2+3y+C = \frac{2}{3}y^3-\frac{5}{2}y^2+3y+C \quad .$$

よって,

$$\int_{-2}^{4}(2y^2-5y+3)\,dy = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad\Big]_{-2}^{4}$$

$\boxed{問 6.7.1}$ 定積分 $\int_{-2}^{4}(2y^2-5y+3)\,dy$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int(2y^2-5y+3)\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}y^3-5\cdot\frac{1}{2}y^2+3y+C = \frac{2}{3}y^3-\frac{5}{2}y^2+3y+C\ .$$

よって,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{4}(2y^2-5y+3)\,dy &= \left[\frac{2}{3}y^3-\frac{5}{2}y^2+3y\right]_{-2}^{4}\\ &= \frac{128}{3}-40+12-\left(-\frac{16}{3}-10-6\right)\\ &= 36\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \int \frac{6}{3\left(x^2+\frac{4}{3}\right)}\,dx = 2\int \frac{1}{x^2+\frac{4}{3}}\,dx$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \int \frac{6}{3\left(x^2+\frac{4}{3}\right)}\,dx = 2\int \frac{1}{x^2+\frac{4}{3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}} + C$$

0 以外の定数 a について $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \int \frac{6}{3\left(x^2+\frac{4}{3}\right)}\,dx = 2\int \frac{1}{x^2+\frac{4}{3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}} + C$$

$$= \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2} + C\ .$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \int \frac{6}{3\left(x^2+\frac{4}{3}\right)}\,dx = 2\int \frac{1}{x^2+\frac{4}{3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}} + C$$

$$= \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2} + C \ .$$

よって

$$\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \left[\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]_{-2}^{\frac{2}{3}}$$

例 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \int \frac{6}{3\left(x^2+\frac{4}{3}\right)}\,dx = 2\int \frac{1}{x^2+\frac{4}{3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}} + C$$

$$= \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2} + C \ .$$

よって

$$\int_{-2}^{\frac{2}{3}} \frac{6}{3x^2+4}\,dx = \left[\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]_{-2}^{\frac{2}{3}} = \sqrt{3}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan^{-1}(-\sqrt{3})\right\}$$

$$= \sqrt{3}\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} + \tan^{-1}\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{2} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}6.7.2}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{4x^2+3}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{4x^2+3}\,dx = \quad \int \frac{1}{x^2+\quad}\,dx =$$

よって

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{4x^2+3}\,dx = \Big[\qquad\qquad\qquad \Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=$$

$\boxed{問6.7.2}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{4x^2+3}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{4x^2+3}\,dx = \frac{6}{4}\int \frac{1}{x^2+\dfrac{3}{4}}\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{4}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\dfrac{3}{4}}} + C = \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C\ .$$

よって

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{4x^2+3}\,dx = \Big[\qquad\qquad\qquad\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=$$

問6.7.2 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{4x^2+3}\,dx$ を計算せよ．

積分定数を C とおく．

$$\int \frac{6}{4x^2+3}\,dx = \frac{6}{4}\int \frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C \ .$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{4x^2+3}\,dx &= \left[\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \sqrt{3}\left\{\tan^{-1}1 - \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{5\sqrt{3}\,\pi}{12} \ .
\end{aligned}$$

終

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4\left(\dfrac{3}{4}-x^2\right)}}\,dx$$

例 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4\left(\frac{3}{4}-x^2\right)}}\,dx = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\,dx$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4\left(\frac{3}{4}-x^2\right)}}\,dx = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{6}}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C$$

正の定数 a について $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$ ．

例 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4\left(\frac{3}{4}-x^2\right)}}\,dx = \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{6}}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C \ .$$

$$\int \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx \;=\; \frac{\sqrt{6}}{2}\,\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C \quad .$$

$$\int \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx \;=\; \frac{\sqrt{6}}{2}\,\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C \quad .$$

よって，

$$\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \left[\frac{\sqrt{6}}{2}\,\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\int \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{6}}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + C \ .$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{6}{3-4x^2}}\,dx &= \left[\frac{\sqrt{6}}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]_{-\frac{3}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\left\{\sin^{-1}1 - \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\sin^{-1}1 + \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{5\sqrt{6}\,\pi}{12} \ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}6.7.3}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx = \frac{\qquad}{} \int \frac{1}{\sqrt{\qquad - x^2}}\,dx =$$

よって,

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx = \Big[\qquad\qquad\qquad \Big]_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$=$$

$\boxed{問 6.7.3}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}-x^2}}\,dx = \sqrt{4}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{8}{3}}} + C$$

$$= 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{8}}x\right) + C \quad .$$

よって,

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx = \Big[\qquad\qquad\qquad \Big]_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$=$$

$\boxed{問 6.7.3}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}-x^2}}\,dx = \sqrt{4}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{8}{3}}} + C$$

$$= 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{8}}x\right) + C \ .$$

よって,

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \sqrt{\frac{12}{8-3x^2}}\,dx = \left[2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{8}}x\right)\right]_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$= 2\left\{\sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} = 2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \pi \ .$$

$\boxed{終}$