6.6 不定積分の性質

以下の定理が成り立つ.

[定理 **6.6.1**]　定数 k は変数 x と無関係とする．区間を定義域とする関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとき，関数 $kf(x)$ の不定積分があり，積分定数を C とおくと

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx + C \ .$$

[定理 **6.6.2**]　同じ区間を定義域とする関数 $f(x)$ 及び $g(x)$ の各々の不定積分 $\int f(x)\,dx$ 及び $\int g(x)\,dx$ があるとき，関数 $f(x)+g(x)$ 及び $f(x)-g(x)$ の不定積分があり，積分定数を C とおくと

$$\int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx + C \quad \text{（複号同順）}.$$

これらを証明する.

定数 k は変数 x と無関係とする．区間を定義域とする関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)dx$ があるとする．関数 F を $F(x)=k\int f(x)dx$ とおく．

　定数 k は変数 x と無関係とする．区間を定義域とする関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとする．関数 F を $F(x) = k\int f(x)\,dx$ とおく．

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left\{k\int f(x)\,dx\right\} = k\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}$$

定数 k は変数 x と無関係とする．区間を定義域とする関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとする．関数 F を $F(x) = k\int f(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により，

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left\{k\int f(x)\,dx\right\} = k\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = kf(x)$$

[定理 **6.4.3**] 関数 f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとき $\dfrac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = f(x)$ ．

定数 k は変数 x と無関係とする．区間を定義域とする関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとする．関数 F を $F(x) = k\int f(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により，

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left\{k\int f(x)\,dx\right\} = k\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = kf(x)$$

つまり $kf(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$ ．

　定数 k は変数 x と無関係とする．区間を定義域とする関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとする．関数 F を $F(x)=k\int f(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により，

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left\{k\int f(x)\,dx\right\} = k\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = kf(x)$$

つまり $kf(x)=\dfrac{d}{dx}F(x)$ ．

$$\int kf(x)\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx$$

定数 k は変数 x と無関係とする．区間を定義域とする関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとする．関数 F を $F(x) = k\int f(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により，

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left\{k\int f(x)\,dx\right\} = k\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = kf(x)$$

つまり $kf(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$ ．積分定数を C とおく．定理 **6.4.4** により

$$\int kf(x)\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C$$

[定理 **6.4.4**]　関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C$ （ C は積分定数）．

　定数 k は変数 x と無関係とする．区間を定義域とする関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとする．関数 F を $F(x) = k\int f(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により，

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left\{k\int f(x)\,dx\right\} = k\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = kf(x)$$

つまり $kf(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$ ．積分定数を C とおく．定理 **6.4.4** により，

$$\int kf(x)\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C = k\int f(x)\,dx + C$$

定数 k は変数 x と無関係とする．区間を定義域とする関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとする．関数 F を $F(x) = k\int f(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により，

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left\{k\int f(x)\,dx\right\} = k\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = kf(x)$$

つまり $kf(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$ ．積分定数を C とおく．定理 **6.4.4** により，

$$\int kf(x)\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C = k\int f(x)\,dx + C$$

つまり $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx + C$ ．

同じ区間を定義域とする関数 $f(x), g(x)$ の各々の不定積分 $\int f(x)\,dx$, $\int g(x)\,dx$ があるとする．関数 G を $G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ とおく．

同じ区間を定義域とする関数 $f(x), g(x)$ の各々の不定積分 $\int f(x)\,dx$, $\int g(x)\,dx$ があるとする．関数 G を $G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ とおく．

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} + \frac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\}$$

同じ区間を定義域とする関数 $f(x), g(x)$ の各々の不定積分 $\int f(x)\,dx$, $\int g(x)\,dx$ があるとする．関数 G を $G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}G(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} + \frac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\} \\ &= f(x) + g(x)\ ,\end{aligned}$$

[定理 **6.4.3**] 関数 f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとき $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = f(x)$ ．

同じ区間を定義域とする関数 $f(x), g(x)$ の各々の不定積分 $\int f(x)\,dx$, $\int g(x)\,dx$ があるとする．関数 G を $G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}G(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} + \frac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\} \\ &= f(x) + g(x)\ ,\end{aligned}$$

つまり $f(x) + g(x) = \dfrac{d}{dx}G(x)$ ．

同じ区間を定義域とする関数 $f(x), g(x)$ の各々の不定積分 $\int f(x)\,dx$, $\int g(x)\,dx$ があるとする．関数 G を $G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}G(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} + \frac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\} \\ &= f(x) + g(x)\ ,\end{aligned}$$

つまり $f(x) + g(x) = \dfrac{d}{dx}G(x)$ ．

$$\int \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int \left\{\frac{d}{dx}G(x)\right\} dx$$

同じ区間を定義域とする関数 $f(x), g(x)$ の各々の不定積分 $\int f(x)\,dx$, $\int g(x)\,dx$ があるとする．関数 G を $G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}G(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} + \frac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\} \\ &= f(x) + g(x)\ ,\end{aligned}$$

つまり $f(x) + g(x) = \frac{d}{dx}G(x)$ ．積分定数を C とおく．定理 **6.4.4** により,

$$\int\{f(x) + g(x)\}\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}G(x)\right\}dx = G(x) + C$$

[定理 **6.4.4**] 関数 F が微分可能である区間において $\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C$ （ C は積分定数）．

　同じ区間を定義域とする関数 $f(x), g(x)$ の各々の不定積分 $\int f(x)\,dx$, $\int g(x)\,dx$ があるとする．関数 G を $G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}G(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} + \frac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\} \\ &= f(x) + g(x) \ , \end{aligned}$$

つまり $f(x) + g(x) = \dfrac{d}{dx}G(x)$ ．積分定数を C とおく．定理 **6.4.4** により，

$$\begin{aligned} \int\{f(x) + g(x)\}\,dx &= \int\left\{\frac{d}{dx}G(x)\right\}dx = G(x) + C \\ &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + C \ . \end{aligned}$$

同じ区間を定義域とする関数 $f(x), g(x)$ の各々の不定積分 $\int f(x)\,dx$, $\int g(x)\,dx$ があるとする．関数 G を $G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ とおく．定理 **6.4.3** により，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}G(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} + \frac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\} \\ &= f(x) + g(x)\ ,\end{aligned}$$

つまり $f(x) + g(x) = \frac{d}{dx}G(x)$ ．積分定数を C とおく．定理 **6.4.4** により，

$$\begin{aligned}\int\{f(x) + g(x)\}\,dx &= \int\left\{\frac{d}{dx}G(x)\right\}dx = G(x) + C \\ &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + C\ .\end{aligned}$$

同様に

$$\int\{f(x) - g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx + C\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int (5x^3 + \sin x)\, dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int (5x^3+\sin x)\,dx$ を計算する.

$$\int (5x^3+\sin x)\,dx = \int 5x^3 dx + \int \sin x\,dx + C_1 \quad （C_1 \text{ は積分定数}）,$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int (5x^3 + \sin x)\, dx$ を計算する.

$$\int (5x^3 + \sin x)\, dx = \int 5x^3 dx + \int \sin x\, dx + C_1 \quad （C_1 \text{ は積分定数}）,$$

$$\int 5x^3 dx = 5 \int x^3 dx + C_2 \quad （C_2 \text{ は積分定数}）,$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int(5x^3+\sin x)\,dx$ を計算する.

$$\int(5x^3+\sin x)\,dx=\int 5x^3dx+\int\sin x\,dx+C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}),$$

$$\int 5x^3dx=5\int x^3dx+C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数}),$$

$$\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C_3 \quad (C_3 \text{ は積分定数}),$$

例 不定積分 $\int (5x^3 + \sin x)\,dx$ を計算する．

$$\int (5x^3 + \sin x)\,dx = \int 5x^3 dx + \int \sin x\,dx + C_1 \quad （C_1 \text{ は積分定数}），$$

$$\int 5x^3 dx = 5\int x^3 dx + C_2 \quad （C_2 \text{ は積分定数}），$$

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C_3 \quad （C_3 \text{ は積分定数}），$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C_4 \quad （C_4 \text{ は積分定数}），$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int(5x^3+\sin x)\,dx$ を計算する．

$$\int(5x^3+\sin x)\,dx=\int 5x^3dx+\int\sin x\,dx+C_1 \quad （C_1 \text{ は積分定数}），$$

$$\int 5x^3dx=5\int x^3dx+C_2 \quad （C_2 \text{ は積分定数}），$$

$$\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C_3 \quad （C_3 \text{ は積分定数}），$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C_4 \quad （C_4 \text{ は積分定数}），$$

よって

$$\begin{aligned}\int(5x^3+\sin x)\,dx&=\int 5x^3dx+\int\sin x\,dx+C_1=5\int x^3dx+C_2-\cos x+C_4+C_1\\&=5\left(\frac{1}{4}x^4+C_3\right)+C_2-\cos x+C_4+C_1\\&=\frac{5}{4}x^4-\cos x+C_1+C_2+5C_3+C_4 \quad .\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\int(5x^3+\sin x)\,dx$ を計算する.

$$\int(5x^3+\sin x)\,dx=\int 5x^3dx+\int\sin x\,dx+C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}),$$

$$\int 5x^3dx=5\int x^3dx+C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数}),$$

$$\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C_3 \quad (C_3 \text{ は積分定数}),$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C_4 \quad (C_4 \text{ は積分定数}),$$

よって

$$\begin{aligned}\int(5x^3+\sin x)\,dx&=\int 5x^3dx+\int\sin x\,dx+C_1=5\int x^3dx+C_2-\cos x+C_4+C_1\\&=5\left(\frac{1}{4}x^4+C_3\right)+C_2-\cos x+C_4+C_1\\&=\frac{5}{4}x^4-\cos x+C_1+C_2+5C_3+C_4\ .\end{aligned}$$

$C=C_1+C_2+5C_3+C_4$ とおくと, C も定数であり,

$$\int(5x^3+\sin x)\,dx=\frac{5}{4}x^4-\cos x+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

結局，不定積分 $\int(5x^3+\sin x)\,dx$ の計算結果は次のようにまとめられる：

$$\int(5x^3+\sin x)\,dx=\frac{5}{4}x^4-\cos x+C \quad \text{（C は積分定数）}.$$

終

結局，不定積分 $\int(5x^3+\sin x)\,dx$ の計算結果は次のようにまとめられる：

$$\int(5x^3+\sin x)\,dx = \frac{5}{4}x^4 - \cos x + C \quad （C \text{ は積分定数}）. \qquad \boxed{終}$$

このように，不定積分の計算の途中に現れる積分定数は最後に一つの積分定数にまとめることができる．

結局，不定積分 $\int (5x^3 + \sin x)\,dx$ の計算結果は次のようにまとめられる：

$$\int (5x^3 + \sin x)\,dx = \frac{5}{4}x^4 - \cos x + C \quad （C \text{ は積分定数}）.$$

終

　このように，不定積分の計算の途中に現れる積分定数は最後に一つの積分定数にまとめることができる．そこで，途中の式の総てに積分定数を書くのは面倒なので，不定積分を表す式 $\int f(x)\,dx$ は積分定数を含むものと約束して，

不定積分を表す式 $\int f(x)\,dx$ を含む式では積分定数を省く

ことにする．

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int (5x^3 + \sin x)\, dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int (5x^3 + \sin x)\, dx$ を計算する.

$$\int (5x^3 + \sin x)\, dx = \int 5x^3 dx + \int \sin x\, dx + C_1 \quad （ C_1 \text{ は積分定数）} \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int(5x^3+\sin x)\,dx$ を計算する.

$$\int(5x^3+\sin x)\,dx = \int 5x^3 dx + \int \sin x\,dx + C_1 \quad （\,C_1\ \text{は積分定数}）\quad .$$

この等式の右辺の積分定数 C_1 は不定積分の式 $\int 5x^3 dx$ 或いは $\int \sin x\,dx$ に含まれると考えて，次のように計算する：

$$\int(5x^3+7\sin x)\,dx = \int 5x^3 dx + \int \sin x\,dx \ .$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\int(5x^3+\sin x)\,dx$ を計算する.

$$\int(5x^3+\sin x)\,dx = \int 5x^3 dx + \int \sin x\,dx + C_1 \quad（C_1 \text{ は積分定数}）\quad .$$

この等式の右辺の積分定数 C_1 は不定積分の式 $\int 5x^3 dx$ 或いは $\int \sin x\,dx$ に含まれると考えて，次のように計算する：

$$\int(5x^3+7\sin x)\,dx = \int 5x^3 dx + \int \sin x\,dx \quad .$$

等式 $\int 5x^3 dx = 5\int x^3 dx + C_2$ （C_2 は積分定数） の右辺の積分定数 C_2 は不定積分の式 $\int x^3 dx$ の中に含まれると考えて，$\int 5x^3 dx = 5\int x^3 dx$ と計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int (5x^3 + \sin x)\,dx$ を計算する.

$$\int (5x^3 + \sin x)\,dx = \int 5x^3 dx + \int \sin x\,dx + C_1 \quad (\,C_1\ \text{は積分定数}) \quad .$$

この等式の右辺の積分定数 C_1 は不定積分の式 $\int 5x^3 dx$ 或いは $\int \sin x\,dx$ に含まれると考えて，次のように計算する：

$$\int (5x^3 + 7\sin x)\,dx = \int 5x^3 dx + \int \sin x\,dx \ .$$

等式 $\int 5x^3 dx = 5\int x^3 dx + C_2$ （ C_2 は積分定数） の右辺の積分定数 C_2 は不定積分の式 $\int x^3 dx$ の中に含まれると考えて， $\int 5x^3 dx = 5\int x^3 dx$ と計算する．このようにすると次のように計算できる：

$$\begin{aligned} \int (5x^3 + \sin x)\,dx &= \int 5x^3 dx + \int \sin x\,dx = 5\int x^3 dx + (-\cos x) \\ &= \frac{5}{4}x^4 - \cos x + C \quad (\,C\ \text{は積分定数}). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int(5x^3+\sin x)\,dx$ を計算する．

$$\int(5x^3+\sin x)\,dx = \int 5x^3dx+\int\sin x\,dx+C_1 \quad (\ C_1 \ \text{は積分定数}) \quad .$$

この等式の右辺の積分定数 C_1 は不定積分の式 $\int 5x^3dx$ 或いは $\int\sin x\,dx$ に含まれると考えて，次のように計算する：

$$\int(5x^3+7\sin x)\,dx = \int 5x^3dx+\int\sin x\,dx \ .$$

等式 $\int 5x^3dx=5\int x^3dx+C_2$ （ C_2 は積分定数） の右辺の積分定数 C_2 は不定積分の式 $\int x^3dx$ の中に含まれると考えて， $\int 5x^3dx=5\int x^3dx$ と計算する．このようにすると次のように計算できる：

$$\begin{aligned}\int(5x^3+\sin x)\,dx &= \int 5x^3dx+\int\sin x\,dx = 5\int x^3dx+(-\cos x)\\ &= \frac{5}{4}x^4-\cos x+C \quad (\ C \ \text{は積分定数}).\end{aligned}$$

この最後の式 $\frac{5}{4}x^4-\cos x+C$ の中には不定積分の式が無いので，積分定数 C を省かない．

$\boxed{\text{終}}$

このようにすると，不定積分の計算では

不定積分の式 $\int f(x)\,dx$ が含まれなくなった式から積分定数を付けることになる.

例　不定積分 $\displaystyle\int \frac{2\cos t + 3}{5}\,dt$ を計算する．積分定数を C とおく．

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2\cos t+3}{5}\,dt$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{2\cos t+3}{5}\,dt &= \frac{1}{5}\int (2\cos t+3)\,dt = \frac{1}{5}\Bigl(\int 2\cos t\,dt + \int 3\,dt\Bigr)\\ &= \frac{1}{5}\Bigl(2\int \cos t\,dt + 3t\Bigr)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2\cos t + 3}{5}\,dt$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{2\cos t+3}{5}\,dt &= \frac{1}{5}\int (2\cos t+3)\,dt = \frac{1}{5}\Bigl(\int 2\cos t\,dt + \int 3\,dt\Bigr) \\ &= \frac{1}{5}\Bigl(2\int \cos t\,dt + 3t\Bigr) = \frac{1}{5}(2\sin t+3t)+C \\ &= \frac{2\sin t+3t}{5}+C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}6.6.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int\left(\frac{5}{2}x^2-4x+3\right)dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int\left(\frac{5}{2}x^2-4x+3\right)dx=$$

$\boxed{問6.6.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int\left(\frac{5}{2}x^2-4x+3\right)dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$
\begin{aligned}
\int\left(\frac{5}{2}x^2-4x+3\right)dx &= \frac{5}{2}\int x^2dx-4\int x\,dx+\int 3\,dx \\
&= \frac{5}{2}\,\frac{1}{3}x^3-4\frac{1}{2}x^2+3x+C \\
&= \frac{5}{6}x^3-2x^2+3x+C\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問6.6.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3\sin t + 5}{7}\,dt$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{3\sin t + 5}{7}\,dt =$$

$\boxed{\text{問}6.6.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3\sin t+5}{7}\,dt$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{3\sin t+5}{7}\,dt = \frac{1}{7}\Big(3\int \sin t\,dt + \int 5\,dt\Big) = \frac{1}{7}\{3(-\cos t)+5t\}+C$$
$$= \frac{5t-3\cos t}{7}+C \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5y+3}{2y^2}\,dy$ を計算する．積分定数を C とおく．

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5y+3}{2y^2}\,dy$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{5y+3}{2y^2}\,dy &= \int\left(\frac{5y}{2y^2}+\frac{3}{2y^2}\right)dy = \int \frac{5}{2y}\,dy + \int \frac{3}{2y^2}\,dy \\ &= \frac{5}{2}\int \frac{1}{y}\,dy + \frac{3}{2}\textstyle\int y^{-2}\,dy =\end{aligned}$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5y+3}{2y^2}\,dy$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \frac{5y+3}{2y^2}\,dy = \int \left(\frac{5y}{2y^2} + \frac{3}{2y^2}\right) dy = \int \frac{5}{2y}\,dy + \int \frac{3}{2y^2}\,dy$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{1}{y}\,dy + \frac{3}{2}\int y^{-2}\,dy = \frac{5}{2}\ln|y| + \frac{3}{2}(-y^{-1}) + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5y+3}{2y^2}\,dy$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{5y+3}{2y^2}\,dy &= \int\left(\frac{5y}{2y^2}+\frac{3}{2y^2}\right)dy = \int \frac{5}{2y}\,dy + \int \frac{3}{2y^2}\,dy \\ &= \frac{5}{2}\int \frac{1}{y}\,dy + \frac{3}{2}\int y^{-2}\,dy = \frac{5}{2}\ln|y| + \frac{3}{2}(-y^{-1}) + C \\ &= \frac{5}{2}\ln|y| - \frac{3}{2y} + C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 6.6.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2u-5}{3u^2}\,du$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{2u-5}{3u^2}\,du =$$

$\boxed{問6.6.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2u-5}{3u^2}\,du$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2u-5}{3u^2}\,du &= \int \left(\frac{2}{3}\frac{1}{u} - \frac{5}{3}\frac{1}{u^2}\right)du = \frac{2}{3}\int \frac{1}{u}\,du - \frac{5}{3}\textstyle\int u^{-2}du \\
&= \frac{2}{3}\ln|u| - \frac{5}{3}(-u^{-1}) + C \\
&= \frac{2}{3}\ln|u| + \frac{5}{3u} + C \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int\sqrt{7x}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

例 不定積分 $\int \sqrt{7x}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \sqrt{7x}\,dx = \int \sqrt{7}\sqrt{x}\,dx = \sqrt{7}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

例 不定積分 $\int \sqrt{7x}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \sqrt{7x}\,dx = \int \sqrt{7}\sqrt{x}\,dx = \sqrt{7}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{7}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int\sqrt{7x}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int\sqrt{7x}\,dx = \int\sqrt{7}\sqrt{x}\,dx = \sqrt{7}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{7}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{7}}{3}x\sqrt{x} + C$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{7x} + C \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問6.6.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{3}{2y}}\,dy$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int\sqrt{\frac{3}{2y}}\,dy =$$

$\boxed{\text{問}6.6.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{3}{2y}}\,dy$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int\sqrt{\frac{3}{2y}}\,dy=\sqrt{\frac{3}{2}}\int\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy=\sqrt{\frac{3}{2}}\int y^{-\frac{1}{2}}dy=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\sqrt{6y}+C\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{10}{4x^2+3}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{10}{4x^2+3}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \frac{10}{4x^2+3}\,dx = \int \frac{10}{4\left(x^2+\frac{3}{4}\right)}\,dx = \int \frac{5}{2}\,\frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{10}{4x^2+3}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{10}{4x^2+3}\,dx &= \int \frac{10}{4\left(x^2+\frac{3}{4}\right)}\,dx = \int \frac{5}{2}\,\frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}\,dx \\ &= \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{10}{4x^2+3}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int \frac{10}{4x^2+3}\,dx = \int \frac{10}{4\left(x^2+\frac{3}{4}\right)}\,dx = \int \frac{5}{2}\frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx = \frac{5}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

0 以外の定数 a について $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$ ．

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{10}{4x^2+3}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{10}{4x^2+3}\,dx &= \int \frac{10}{4\left(x^2+\frac{3}{4}\right)}\,dx = \int \frac{5}{2}\frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}\,dx \\ &= \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx = \frac{5}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C \\ &= \frac{5}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}+C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}6.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6}{5x^2+4}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6}{5x^2+4}\,dx = \frac{6}{5}\int \frac{1}{x^2+\frac{4}{5}}\,dx = \frac{6}{5}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{5}}} + C$$

$\boxed{問6.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6}{5x^2+4}\,dx$ を計算せよ．

積分定数を C とおく．

$$\int \frac{6}{5x^2+4}\,dx = \frac{6}{5}\int \frac{1}{x^2+\frac{4}{5}}\,dx = \frac{6}{5}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{5}}} + C$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}\,x}{2} + C \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{7}{9-5x^2}}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

例 不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{7}{9-5x^2}}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int\sqrt{\frac{7}{9-5x^2}}\,dx=\int\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5\left(\frac{9}{5}-x^2\right)}}\,dx$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{7}{9-5x^2}}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int\sqrt{\frac{7}{9-5x^2}}\,dx=\int\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5\left(\frac{9}{5}-x^2\right)}}\,dx=\int\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{9}{5}-x^2}}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2-x^2}}\,dx$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{7}{9-5x^2}}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int\sqrt{\frac{7}{9-5x^2}}\,dx=\int\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5\left(\frac{9}{5}-x^2\right)}}\,dx=\int\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{9}{5}-x^2}}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2-x^2}}\,dx=\sqrt{\frac{7}{5}}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{5}}}+C$$

正の定数 a について $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$.

例 不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{7}{9-5x^2}}\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく．

$$\int\sqrt{\frac{7}{9-5x^2}}\,dx=\int\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5\left(\frac{9}{5}-x^2\right)}}\,dx=\int\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{9}{5}-x^2}}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2-x^2}}\,dx=\sqrt{\frac{7}{5}}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{5}}}+C$$

$$=\sqrt{\frac{7}{5}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}\,x}{3}+C\ .$$

終

$\boxed{問 6.6.6}$ 不定積分 $\int \sqrt{\dfrac{6}{7-9x^2}}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \sqrt{\frac{6}{7-9x^2}}\,dx =$$

$\boxed{\text{問}6.6.6}$ 不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{6}{7-9x^2}}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{6}{7-9x^2}}\,dx &= \int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9\left(\frac{7}{9}-x^2\right)}}\,dx = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{9}-x^2}}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{6}}{3}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{\sqrt{7}}{3}} + C \\
&= \frac{\sqrt{6}}{3}\sin^{-1}\frac{3x}{\sqrt{7}} + C \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$