6.4 不定積分

定積分の定義を復習する.

[定義] 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n =$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．
$\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，
　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：
$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n = $$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．

$\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　 であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，

　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：

$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \le b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}\ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．

$\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　 であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，

　　　　　　 を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：

$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　　 .

[定義] 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．

$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，f のリーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：
$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ ．

関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとする.

関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとする．f の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．

関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとする．f の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．しかし，a,b が属するある区間において $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ である関数 F が見つかれば，微分積分の基本定理により $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ のように計算できる．

関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとする．f の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．しかし，a, b が属するある区間において $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ である関数 F が見つかれば，微分積分の基本定理により $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ のように計算できる．そこで，関数 f の定積分を計算するために，$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ である関数 F を見つけることが重要になる．

関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとする．f の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．しかし，a, b が属するある区間において $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ である関数 F が見つかれば，微分積分の基本定理により $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ のように計算できる．そこで，関数 f の定積分を計算するために，$\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ である関数 F を見つけることが重要になる．

関数 f と F とについて，$\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ であるとき，F は f の原始関数であるという．

　関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとする．f の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は f のリーマン和の極限値であるが，多くの場合リーマン和の極限値は計算し難い．しかし，a, b が属すある区間において $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ である関数 F が見つかれば，微分積分の基本定理により $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ のように計算できる．そこで，関数 f の定積分を計算するために，$\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ である関数 F を見つけることが重要になる．

　関数 f と F とについて，$\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ であるとき，F は f の原始関数であるという．つまり，関数 f と F とについて，

$$
\begin{aligned}
F \text{ は } f \text{ の原始関数である} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad f \text{ は } F \text{ の導関数である} \quad .
\end{aligned}
$$

このように，原始関数というのは導関数と逆の概念である．

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ なので，関数 x^3 は関数 $3x^2$ の原始関数である．

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ なので，関数 x^3 は関数 $3x^2$ の原始関数である．

$\dfrac{d}{dx}(x^3+5) = 3x^2+0 = 3x^2$ なので関数 x^3+5 も関数 $3x^2$ の原始関数である．

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ なので，関数 x^3 は関数 $3x^2$ の原始関数である．

$\dfrac{d}{dx}(x^3+5) = 3x^2+0 = 3x^2$ なので関数 x^3+5 も関数 $3x^2$ の原始関数である．

$\dfrac{d}{dx}\left(x^3-\sqrt{7}\right) = 3x^2+0 = 3x^2$ なので関数 $x^3-\sqrt{7}$ も関数 $3x^2$ の原始関数である．

例　$\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ なので，関数 x^3 は関数 $3x^2$ の原始関数である．
$\dfrac{d}{dx}(x^3+5) = 3x^2+0 = 3x^2$ なので関数 x^3+5 も関数 $3x^2$ の原始関数である．
$\dfrac{d}{dx}\left(x^3-\sqrt{7}\right) = 3x^2+0 = 3x^2$ なので関数 $x^3-\sqrt{7}$ も関数 $3x^2$ の原始関数である．任意の定数 C に対して，$\dfrac{d}{dx}(x^3+C) = 3x^2+0 = 3x^2$ なので，関数 x^3+C は関数 $3x^2$ の原始関数である．終

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ なので，関数 x^3 は関数 $3x^2$ の原始関数である．
$\dfrac{d}{dx}(x^3+5) = 3x^2+0 = 3x^2$ なので関数 x^3+5 も関数 $3x^2$ の原始関数である．
$\dfrac{d}{dx}\left(x^3-\sqrt{7}\right) = 3x^2+0 = 3x^2$ なので関数 $x^3-\sqrt{7}$ も関数 $3x^2$ の原始関数である．任意の定数 C に対して， $\dfrac{d}{dx}(x^3+C) = 3x^2+0 = 3x^2$ なので，関数 x^3+C は関数 $3x^2$ の原始関数である． $\boxed{\text{終}}$

関数 $F(x)$ が関数 $f(x)$ の原始関数であるならば， $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ なので，任意の定数 C に対して， $\dfrac{d}{dx}\{F(x)+C\} = \dfrac{d}{dx}F(x)+0 = f(x)$ ，よって関数 $F(x)+C$ は $f(x)$ の原始関数である．

例　$\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ なので，関数 x^3 は関数 $3x^2$ の原始関数である．
$\dfrac{d}{dx}(x^3+5) = 3x^2+0 = 3x^2$ なので関数 x^3+5 も関数 $3x^2$ の原始関数である．
$\dfrac{d}{dx}\left(x^3-\sqrt{7}\right) = 3x^2+0 = 3x^2$ なので関数 $x^3-\sqrt{7}$ も関数 $3x^2$ の原始関数である．任意の定数 C に対して，$\dfrac{d}{dx}(x^3+C) = 3x^2+0 = 3x^2$ なので，関数 x^3+C は関数 $3x^2$ の原始関数である．　終

関数 $F(x)$ が関数 $f(x)$ の原始関数であるならば，$\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ なので，任意の定数 C に対して，$\dfrac{d}{dx}\{F(x)+C\} = \dfrac{d}{dx}F(x)+0 = f(x)$，よって関数 $F(x)+C$ は $f(x)$ の原始関数である．

[定理 **6.4.1**]　関数 $F(x)$ が関数 $f(x)$ の原始関数であるならば，任意の定数 C に対して，関数 $F(x)+C$ は $f(x)$ の原始関数である．

[定理 **5.2.2**] 関数 F と G とが区間 I において微分可能であり，I の各実数 x について $G'(x) = F'(x)$ ならば，ある定数 C をとると I の各実数 x について $G(x) = F(x) + C$.

[定理 **5.2.2**] 関数 F と G とが区間 I において微分可能であり，I の各実数 x について $G'(x)=F'(x)$ ならば，ある定数 C をとると I の各実数 x について $G(x)=F(x)+C$ ．

区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，I の各実数 x について， $F'(x)=f(x)$ かつ $G'(x)=f(x)$ なので $G'(x)=F'(x)$ ，

[定理 **5.2.2**] 関数 F と G とが区間 I において微分可能であり，I の各実数 x について $G'(x)=F'(x)$ ならば，ある定数 C をとると I の各実数 x について $G(x)=F(x)+C$ ．

　区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，I の各実数 x について，$F'(x)=f(x)$ かつ $G'(x)=f(x)$ なので $G'(x)=F'(x)$ ，定理 **5.2.2** により，ある定数 C をとると $G(x)=F(x)+C$ ．

[定理 5.2.2] 関数 F と G とが区間 I において微分可能であり，I の各実数 x について $G'(x) = F'(x)$ ならば，ある定数 C をとると I の各実数 x について $G(x) = F(x) + C$ ．

区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，I の各実数 x について，$F'(x) = f(x)$ かつ $G'(x) = f(x)$ なので $G'(x) = F'(x)$ ，定理 **5.2.2** により，ある定数 C をとると $G(x) = F(x) + C$ ．

[定理 6.4.2] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると，$G(x) = F(x) + C$ ．

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると， $G(x) = F(x) + C$.

この定理において関数 f の定義域が区間であることに注意すること.

[定理 **6.4.2**]　区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると，$G(x) = F(x) + C$.

この定理において関数 f の定義域が区間であることに注意すること.

$\boxed{\text{例}}$　0 以外の実数全体を定義域とする関数 F と G とを次のように定める：

$$F(x) = \frac{1}{x} \ , \qquad G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + 4 & (\ x > 0 \ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{x} + 5 & (\ x < 0 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると， $G(x) = F(x) + C$.

この定理において関数 f の定義域が区間であることに注意すること.

$\boxed{\text{例}}$ 0 以外の実数全体を定義域とする関数 F と G とを次のように定める：

$$F(x) = \frac{1}{x} \ , \qquad G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + 4 & (\ x > 0 \ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{x} + 5 & (\ x < 0 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

$F'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ かつ $G'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ なので，$F(x)$ も $G(x)$ も関数 $-\dfrac{1}{x^2}$ の原始関数である.

[定理 **6.4.2**]　区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると，$G(x) = F(x) + C$ ．

この定理において関数 f の定義域が区間であることに注意すること．

例　0 以外の実数全体を定義域とする関数 F と G とを次のように定める：

$$F(x) = \frac{1}{x} \ , \qquad G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + 4 & (\ x > 0 \ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{x} + 5 & (\ x < 0 \ \text{のとき}) \end{cases} \ .$$

$F'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ かつ $G'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ なので，$F(x)$ も $G(x)$ も関数 $-\dfrac{1}{x^2}$ の原始関数である．しかし，一つの定数 C を選んで $G(x) = F(x) + C$ とはならない．終

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると，$G(x) = F(x) + C$.

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $\dfrac{1}{4}x^4$ は関数 x^3 の原始関数である：$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{4}x^4\right) = x^3$ ．実数全体を定義域とする関数 $F(x)$ は関数 x^3 の原始関数であり $F(2) = 7$ とする；このような関数 $F(x)$ を求める．

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると， $G(x) = F(x) + C$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $\dfrac{1}{4}x^4$ は関数 x^3 の原始関数である： $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{4}x^4\right) = x^3$ ．実数全体を定義域とする関数 $F(x)$ は関数 x^3 の原始関数であり $F(2) = 7$ とする；このような関数 $F(x)$ を求める．関数 $\dfrac{1}{4}x^4$ と関数 $F(x)$ とは共に関数 x^3 の原始関数なので，ある定数 C をとると $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + C$ ．

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると， $G(x) = F(x) + C$ ．

例 関数 $\frac{1}{4}x^4$ は関数 x^3 の原始関数である： $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right) = x^3$ ．実数全体を定義域とする関数 $F(x)$ は関数 x^3 の原始関数であり $F(2) = 7$ とする；このような関数 $F(x)$ を求める．関数 $\frac{1}{4}x^4$ と関数 $F(x)$ とは共に関数 x^3 の原始関数なので，ある定数 C をとると $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$ ． $F(2) = 7$ なので，$\frac{1}{4} \cdot 2^4 + C = 7$ ， $4 + C = 7$ ， $C = 3$ ．

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると， $G(x) = F(x) + C$ ．

例 関数 $\dfrac{1}{4}x^4$ は関数 x^3 の原始関数である： $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{4}x^4\right) = x^3$ ．実数全体を定義域とする関数 $F(x)$ は関数 x^3 の原始関数であり $F(2) = 7$ とする；このような関数 $F(x)$ を求める．関数 $\dfrac{1}{4}x^4$ と関数 $F(x)$ とは共に関数 x^3 の原始関数なので，ある定数 C をとると $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + C$ ． $F(2) = 7$ なので，$\dfrac{1}{4} \cdot 2^4 + C = 7$ ， $4 + C = 7$ ， $C = 3$ ．故に $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + 3$ ． 終

$\boxed{問6.4.1}$ 正弦関数 $\sin x$ は余弦関数 $\cos x$ の原始関数である： $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ ．
実数全体を定義域とする次のような関数 $F(x)$ を求めよ：$F(x)$ は余弦関数 $\cos x$ の原始関数であり $F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 4$ ．

関数 $F(x)$ と正弦関数 $\sin x$ とは共に余弦関数 $\cos x$ の原始関数なので，ある定数 C をとると $F(x) =$ ． $F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 4$ なので， $= 4$ ， $= 4$ ， $C =$ ．故に $F(x) =$ ．

$\boxed{\text{問}6.4.1}$ 正弦関数 $\sin x$ は余弦関数 $\cos x$ の原始関数である：$\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ ．実数全体を定義域とする次のような関数 $F(x)$ を求めよ：$F(x)$ は余弦関数 $\cos x$ の原始関数であり $F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 4$ ．

関数 $F(x)$ と正弦関数 $\sin x$ とは共に余弦関数 $\cos x$ の原始関数なので，ある定数 C をとると $F(x) = \sin x + C$ ．$F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 4$ なので，$\sin\dfrac{3\pi}{2} + C = 4$ ，$-1 + C = 4$ ，$C = 5$ ．故に $F(x) = 5 + \sin x$ ．$\boxed{\text{終}}$

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると， $G(x) = F(x) + C$ ．

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると， $G(x) = F(x) + C$.

関数 $f(x)$ の原始関数のうちのどれか一つを

$$\int f(x)\,dx$$

と書き表し，これを $f(x)$ の不定積分という.

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると， $G(x) = F(x) + C$ ．

関数 $f(x)$ の原始関数のうちのどれか一つを

$$\int f(x)\,dx$$

と書き表し，これを $f(x)$ の不定積分という.

例 関数 $3x^2$ の原始関数は x^3，x^3+5，$x^3-\sqrt{7}$ など数多くあるが，そのうちのどれか一つを $\int 3x^2 dx$ と書き表す. 関数 x^3 も関数 $\int 3x^2 dx$ も関数 $3x^2$ の原始関数なので，定理 **6.4.2** により，

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C \quad （C \text{ は定数}）.$$

終

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると， $G(x) = F(x) + C$.

関数 $f(x)$ の原始関数のうちのどれか一つを

$$\int f(x)\,dx$$

と書き表し，これを $f(x)$ の不定積分という.

同じ区間を定義域とする関数 $f(x)$ と $F(x)$ とについて，$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，$f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ も $f(x)$ の原始関数なので，定理 **6.4.2** により，ある定数 C をとると

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad .$$

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると， $G(x) = F(x) + C$.

関数 $f(x)$ の原始関数のうちのどれか一つを

$$\int f(x)\,dx$$

と書き表し，これを $f(x)$ の不定積分という.

同じ区間を定義域とする関数 $f(x)$ と $F(x)$ とについて，$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，$f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ も $f(x)$ の原始関数なので，定理 **6.4.2** により，ある定数 C をとると

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \ .$$

このように不定積分を変形するときに現れる定数 C を積分定数という.

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると， $G(x) = F(x) + C$.

関数 $f(x)$ の原始関数のうちのどれか一つを

$$\int f(x)\,dx$$

と書き表し，これを $f(x)$ の不定積分という.

同じ区間を定義域とする関数 $f(x)$ と $F(x)$ とについて，$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，$f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ も $f(x)$ の原始関数なので，定理 **6.4.2** により，ある定数 C をとると

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \ .$$

このように不定積分を変形するときに現れる定数 C を積分定数という.

関数 f の不定積分を求めることを f を積分するといい，積分される関数 f を被積分関数という.

関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ は $f(x)$ の原始関数なので，

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = f(x) \ .$$

[定理 6.4.3] 関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとき，

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = f(x) \ .$$

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると， $G(x) = F(x) + C$ ．

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると，$G(x) = F(x) + C$ ．

関数 $F(x)$ が区間 I において微分可能であるとする．$F(x)$ の導関数を $f(x)$ とおく：$f(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$ ．$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．

[定理 **6.4.2**]　区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると，$G(x) = F(x) + C$ ．

関数 $F(x)$ が区間 I において微分可能であるとする．$F(x)$ の導関数を $f(x)$ とおく：$f(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$ ．$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ も $f(x)$ の原始関数なので，定理 **6.4.2** により，区間 I において，

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (\ C\ \text{は積分定数}\ );$$

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると， $G(x) = F(x) + C$.

関数 $F(x)$ が区間 I において微分可能であるとする． $F(x)$ の導関数を $f(x)$ とおく： $f(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$ ． $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ も $f(x)$ の原始関数なので，定理 **6.4.2** により，区間 I において，

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (\ C \text{ は積分定数});$$

$f(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$ なので， $\displaystyle\int \left\{ \frac{d}{dx}F(x) \right\} dx = F(x) + C$ （ C は積分定数）．

[定理 **6.4.2**] 区間 I を定義域とする関数 F と G との両方が I を定義域とする関数 f の原始関数であるならば，ある定数 C をとると，$G(x) = F(x) + C$.

関数 $F(x)$ が区間 I において微分可能であるとする．$F(x)$ の導関数を $f(x)$ とおく：$f(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$ ．$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ も $f(x)$ の原始関数なので，定理 **6.4.2** により，区間 I において，

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (\ C \text{ は積分定数}\ );$$

$f(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$ なので，$\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C$ （ C は積分定数）．

[定理 **6.4.4**] 関数 F が微分可能である区間において，

$$\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C \quad (\ C \text{ は積分定数}\ ).$$

[定理 **6.4.4**] 関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C$ （ C は積分定数）.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：関数 x^3 に対して $\int x^3 dx = \dfrac{1}{4}x^4 + C$ （ C は積分定数）.

[定理 **6.4.4**] 関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$ （ C は積分定数）.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：関数 x^3 に対して $\int x^3 dx = \dfrac{1}{4}x^4 + C$ （ C は積分定数）.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right) = \frac{1}{4}4x^3 = x^3 \ .$$

[定理 **6.4.4**]　関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$ （ C は積分定数）.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：関数 x^3 に対して $\int x^3 dx = \dfrac{1}{4}x^4 + C$ （ C は積分定数）.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right) = \frac{1}{4}4x^3 = x^3 \ .$$

よって， $x^3 = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{4}x^4\right)$ なので，

$$\int x^3 dx = \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right)\right\}dx = \frac{1}{4}x^4 + C \quad （C \text{ は積分定数}）.$$ $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}6.4.2}$ 次のことを示せ：関数 $\dfrac{1}{x^3}$ （ $x > 0$ ）に対して $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2} + C$ （ C は積分定数）.

$\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right) =$ 　　　　　　　　　　　　　　なので，

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(\qquad \right) \right\} dx = \qquad\qquad + C \ .$$

$\boxed{問 6.4.2}$ 次のことを示せ：関数 $\dfrac{1}{x^3}$ （ $x > 0$ ）に対して $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2} + C$
（ C は積分定数）．

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}x^{-2} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$ なので，

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) \right\} dx = -\frac{1}{2x^2} + C \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}6.4.3}$ 次のことを示せ：関数 $\sqrt{x}$ （ $x \geq 0$ ）に対して $\int \sqrt{x}\,dx = \dfrac{2}{3}\sqrt{x}^{\,3} + C$ （ C は積分定数）.

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{x}^{\,3}\right) =$ 　　　　　　　　　　　　　　なので，

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(\qquad\qquad \right) \right\} dx = \qquad\qquad + C \ .$$

$\boxed{問6.4.3}$ 次のことを示せ：関数 $\sqrt{x}$ （ $x \geq 0$ ）に対して $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x}^{\,3} + C$ （ C は積分定数）.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}^{\,3}\right) = \frac{2}{3}\frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ なので，

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int \left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}^{\,3}\right)\right\}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x}^{\,3} + C \ .$$

$\boxed{終}$

関数の不定積分はあるとは限らない．不定積分の存在について次の定理が成り立つ．

[定理 **6.4.5**]　定義域が区間である関数 $f(x)$ が連続であるならば，$f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ がある．

関数 f の定義域が区間であるとき，f の原始関数 F があるならば，$f(x)=\dfrac{d}{dx}F(x)$ なので，定理 **6.4.4** により

$$\int f(x)\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \text{（ C は積分定数）}.$$

関数 f の定義域が区間であるとき，f の原始関数 F があるならば，$f(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$ なので，定理 **6.4.4** により

$$\int f(x)\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C \text{（} C \text{ は積分定数）}.$$

関数 f の定義域が区間でないときはこのような等式が成り立つとは限らない.

例　$\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2}$ なので，関数 $-\dfrac{1}{x}$ は関数 $\dfrac{1}{x^2}$ の原始関数である．これらの関数の定義域を 0 以外の実数全体で考えると，関数 $\dfrac{1}{x^2}$ の不定積分は次ようになる：

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & （x > 0 \text{ のとき}） \\ -\dfrac{1}{x} + C_2 & （x < 0 \text{ のとき}） \end{cases} \quad （C_1 \text{ と } C_2 \text{ とは定数}）.$$

例　$\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2}$ なので，関数 $-\dfrac{1}{x}$ は関数 $\dfrac{1}{x^2}$ の原始関数である．これらの関数の定義域を 0 以外の実数全体で考えると，関数 $\dfrac{1}{x^2}$ の不定積分は次ようになる：

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & (\,x > 0 \text{ のとき}) \\ -\dfrac{1}{x} + C_2 & (\,x < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\,C_1 \text{ と } C_2 \text{ とは定数}).$$

右辺の定数 C_1 と C_2 とは等しいとは限らないので，厳密にいえば一つの積分定数にまとめることはできない．

例　$\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}$ なので，関数 $-\dfrac{1}{x}$ は関数 $\dfrac{1}{x^2}$ の原始関数である．これらの関数の定義域を 0 以外の実数全体で考えると，関数 $\dfrac{1}{x^2}$ の不定積分は次ようになる：

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}+C_1 & （x>0 \text{ のとき}） \\ -\dfrac{1}{x}+C_2 & （x<0 \text{ のとき}） \end{cases} \quad （C_1 \text{ と } C_2 \text{ とは定数}）.$$

右辺の定数 C_1 と C_2 とは等しいとは限らないので，厳密にいえば一つの積分定数にまとめることはできない．しかし面倒なのでまとめてしまうことが多い：

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}+C \quad （C \text{ は積分定数}）\quad .$$

この等式の右辺において $x>0$ のときと $x<0$ のときとで C の値が同じとは限らない．　終