

6.3 微分積分の基本定理

定積分の定義を復習する.

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = \quad \quad \quad = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \quad \quad \quad ,$$

$$S_n =$$

と定める. 正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n =$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい,

を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す:

$$\int_a^b f(x) dx = \quad \quad \quad .$$

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \quad ,$$

$$S_n =$$

と定める。正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n =$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい、

を a から b までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す：

$$\int_a^b f(x) dx = \quad .$$

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める。正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n =$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい、

を a から b までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す：

$$\int_a^b f(x) dx = \quad .$$

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める。正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい、 f のリーマン和 S_n の極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す：

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

関数 f が a から b まで積分可能であるとき、関数 f は b から a まで積分可能であるといい、 f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x) dx$ を次のように定義する：
$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx .$$

実数 a, b について $a \leq b$ とする. 関数 F は区間 $[a, b]$ において微分可能であり, F の導関数 F' は a から b まで定積分可能であるとする.

実数 a, b について $a \leq b$ とする. 関数 F は区間 $[a, b]$ において微分可能であり, F の導関数 F' は a から b まで定積分可能であるとする. xy 座標平面において関数 $y = F(x)$ のグラフを考える. 正の自然数 n に対して

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

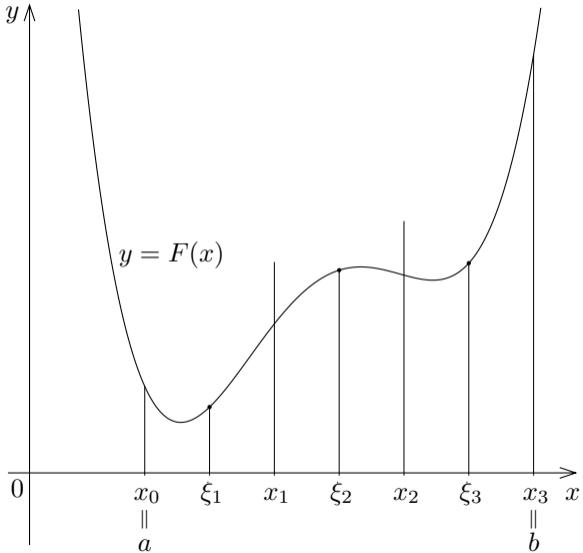
である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとる.

実数 a, b について $a \leq b$ とする. 関数 F は区間 $[a, b]$ において微分可能であり, F の導関数 F' は a から b まで定積分可能であるとする. xy 座標平面において関数 $y = F(x)$ のグラフを考える. 正の自然数 n に対して

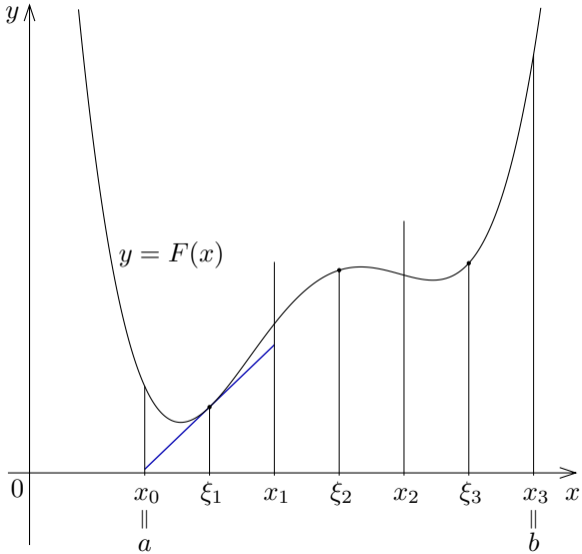
$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとる. $n \rightarrow \infty$ のとき $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ は 0 に収束するとする.

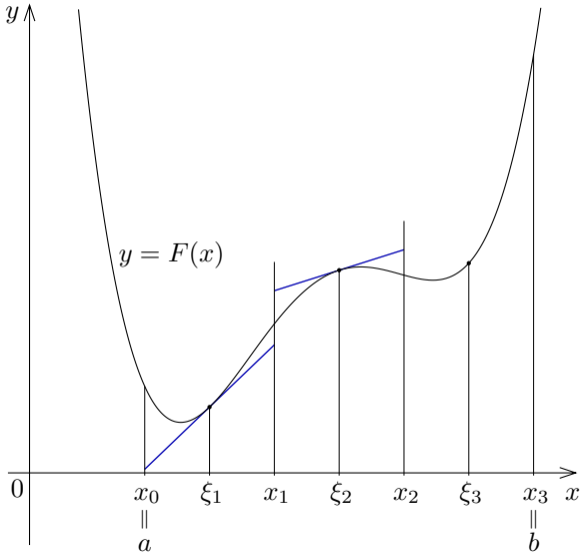
例として $n = 3$ とする.
 $y = F(x)$ のグラフにおいて,



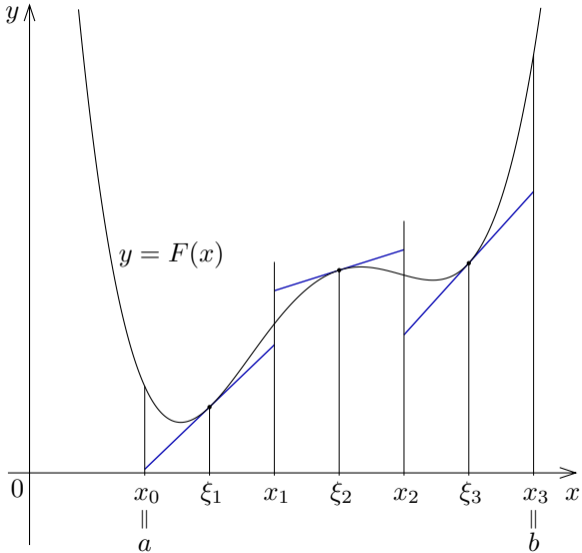
例として $n = 3$ とする.
 $y = F(x)$ のグラフにおいて、点 $(\xi_1, F(\xi_1))$ における接線の点の x 座標の範囲を区間 $[x_0, x_1]$ に制限した線分と、



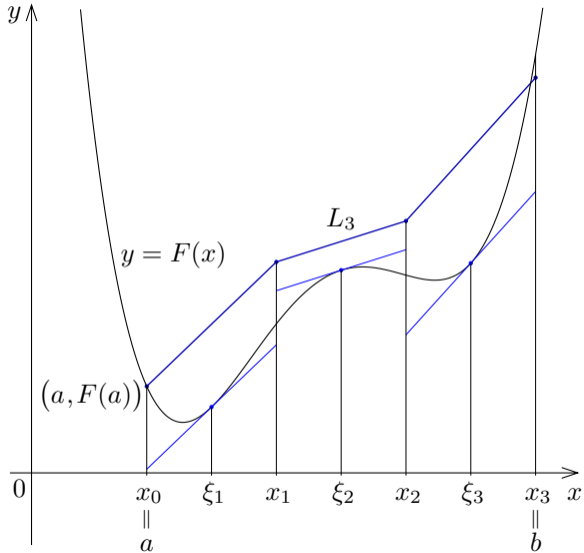
例として $n = 3$ とする.
 $y = F(x)$ のグラフにおいて、点 $(\xi_1, F(\xi_1))$ における接線の点の x 座標の範囲を区間 $[x_0, x_1]$ に制限した線分と、点 $(\xi_2, F(\xi_2))$ における接線の点の x 座標の範囲を区間 $[x_1, x_2]$ に制限した線分と、



例として $n = 3$ とす
 る. $y = F(x)$ のグラフ
 において, 点 $(\xi_1, F(\xi_1))$
 における接線の点の x 座
 標の範囲を区間 $[x_0, x_1]$
 に制限した線分と, 点
 $(\xi_2, F(\xi_2))$ における接線
 の点の x 座標の範囲を区
 間 $[x_1, x_2]$ に制限した線
 分と, 点 $(\xi_3, F(\xi_3))$ にお
 ける接線の点の x 座標の
 範囲を区間 $[x_2, x_3]$ に制
 限した線分とを考える.

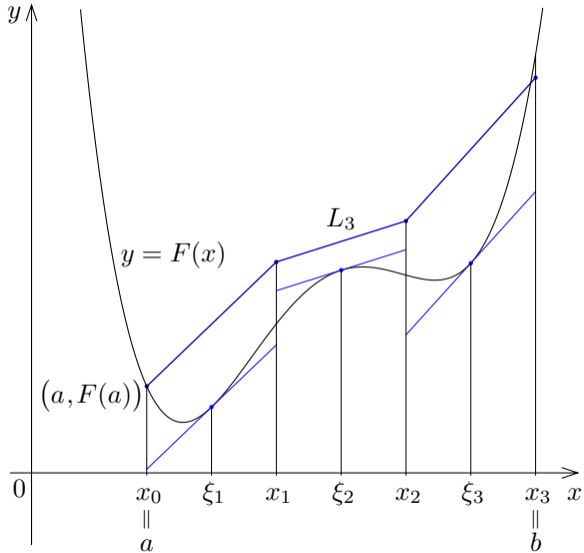


更にこれらの線分を上
下に平行移動させて、一
つに繋げた折れ線 L_3 を
考える. L_3 の左端の点は
 $(a, F(a))$ にする.



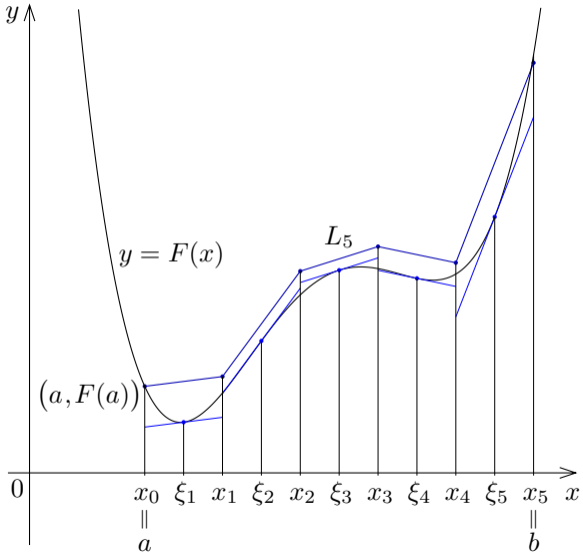
更にこれらの線分を上
下に平行移動させて、一
つに繋げた折れ線 L_3 を
考える. L_3 の左端の点は
 $(a, F(a))$ にする.

このような接線に平行
な線分を一つに繋げた折
れ線で $y = F(x)$ のグラ
フを近似する.

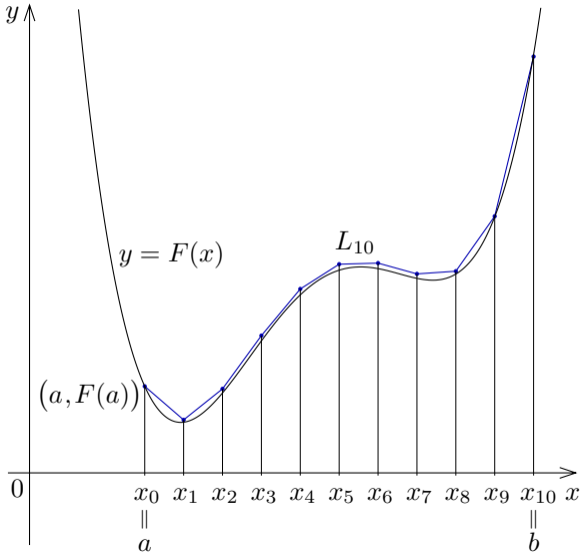


自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して, $y = F(x)$ のグラフの点 $(\xi_k, F(\xi_k))$ における接線において要素の点の x 座標の範囲を区間 $[x_{k-1}, x_k]$ に制限した線分を考える; 更にこれらの線分を上下に平行移動させて, 一つに繋げた折れ線 L_n を作る. L_n の左端の点は $(a, F(a))$ にする.

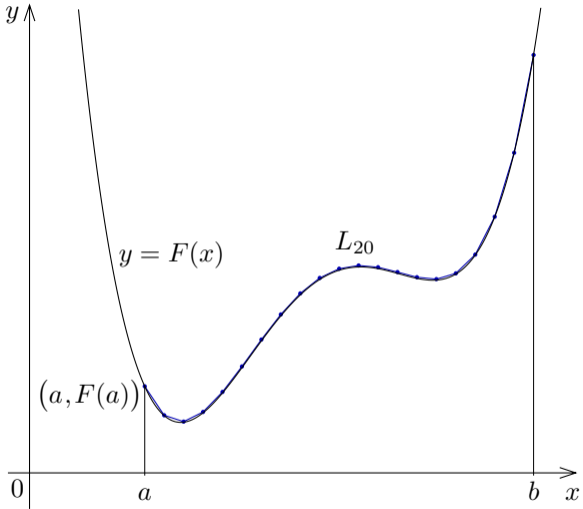
$n = 5$ のときの折れ線
 L_5 は例えば右の図のよう
になる.



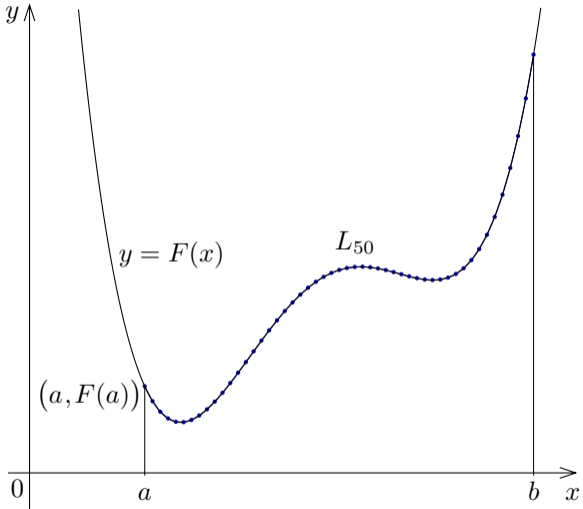
$n = 10$ のときの折れ線
 L_{10} は例えば右の図のよ
うになる.



$n = 20$ のときの折れ線
 L_{20} は例えば右の図のよ
うになる.

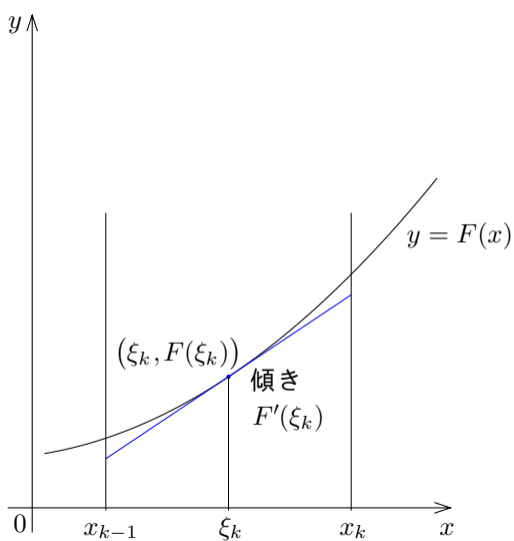


$n = 50$ のときの折れ線
 L_{50} は例えば右の図のよ
うになる.

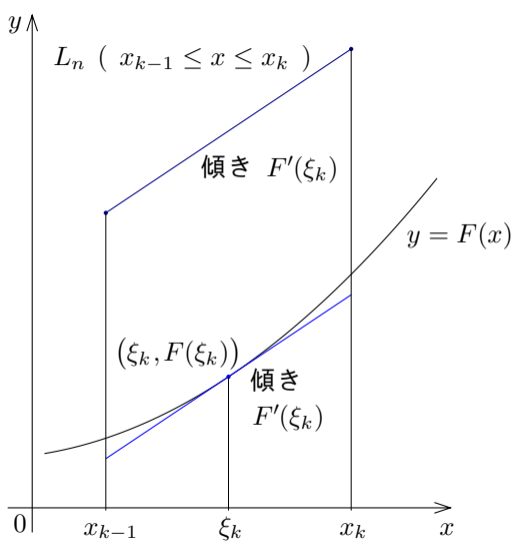


$n \rightarrow \infty$ のとき折れ線 L_n は $y = F(x)$ のグラフに限りなく近づく.

$y = F(x)$ のグラフの点
 $(\xi_k, F(\xi_k))$ における接線の
傾きは $F'(\xi_k)$ である.

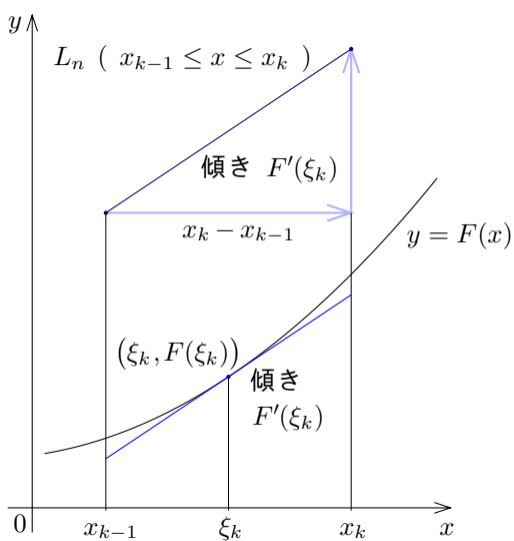


$y = F(x)$ のグラフの点 $(\xi_k, F(\xi_k))$ における接線の傾きは $F'(\xi_k)$ である. 折れ線 L_n を構成する線分のうち要素の点の x 座標の範囲が区間 $[x_{k-1}, x_k]$ である線分は, この接線と平行なので, 傾きが $F'(\xi_k)$ である.

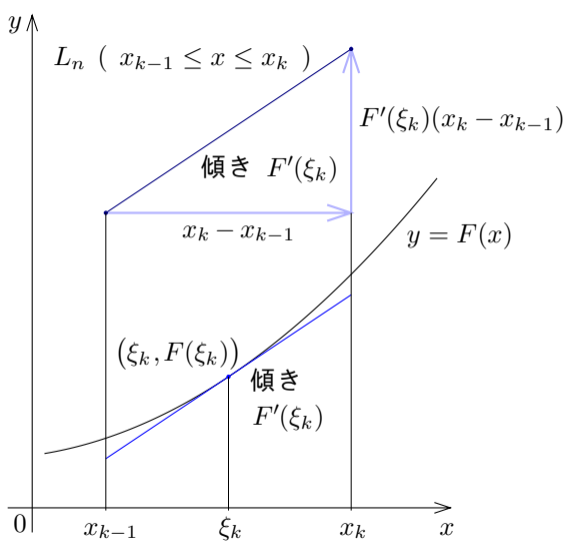


$y = F(x)$ のグラフの点 $(\xi_k, F(\xi_k))$ における接線の傾きは $F'(\xi_k)$ である。折れ線 L_n を構成する線分のうち要素の点の x 座標の範囲が区間 $[x_{k-1}, x_k]$ である線分は、この接線と平行なので、傾きが $F'(\xi_k)$ である。 x 座標が x_{k-1} から x_k に増加するとき、 x 座標の増分は $x_k - x_{k-1}$ なので、 y 座標の増分は

である。



$y = F(x)$ のグラフの点 $(\xi_k, F(\xi_k))$ における接線の傾きは $F'(\xi_k)$ である。折れ線 L_n を構成する線分のうち要素の点の x 座標の範囲が区間 $[x_{k-1}, x_k]$ である線分は、この接線と平行なので、傾きが $F'(\xi_k)$ である。 x 座標が x_{k-1} から x_k に増加するとき、 x 座標の増分は $x_k - x_{k-1}$ なので、 y 座標の増分は $F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ である。



折れ線 L_n において, x 座標が x_{k-1} から x_k に増加すると, y 座標は $F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ 増加する.

折れ線 L_n において, x 座標が x_{k-1} から x_k に増加すると, y 座標は $F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ 増加する.

x 座標が x_0 から x_1 に増加すると y 座標は $F'(\xi_1)(x_1 - x_0)$ 増加し,

x 座標が x_1 から x_2 に増加すると y 座標は $F'(\xi_2)(x_2 - x_1)$ 増加し,

x 座標が x_2 から x_3 に増加すると y 座標は $F'(\xi_3)(x_3 - x_2)$ 増加し,

\vdots

x 座標が x_{n-1} から x_n に増加すると y 座標は $F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ 増加する.

折れ線 L_n において, x 座標が x_{k-1} から x_k に増加すると, y 座標は $F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ 増加する.

x 座標が x_0 から x_1 に増加すると y 座標は $F'(\xi_1)(x_1 - x_0)$ 増加し,

x 座標が x_1 から x_2 に増加すると y 座標は $F'(\xi_2)(x_2 - x_1)$ 増加し,

x 座標が x_2 から x_3 に増加すると y 座標は $F'(\xi_3)(x_3 - x_2)$ 増加し,

\vdots

x 座標が x_{n-1} から x_n に増加すると y 座標は $F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ 増加する.

これらを合計する.

折れ線 L_n において, x 座標が x_{k-1} から x_k に増加すると, y 座標は $F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ 増加する.

x 座標が x_0 から x_1 に増加すると y 座標は $F'(\xi_1)(x_1 - x_0)$ 増加し,

x 座標が x_1 から x_2 に増加すると y 座標は $F'(\xi_2)(x_2 - x_1)$ 増加し,

x 座標が x_2 から x_3 に増加すると y 座標は $F'(\xi_3)(x_3 - x_2)$ 増加し,

⋮

x 座標が x_{n-1} から x_n に増加すると y 座標は $F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ 増加する.

これらを合計する. 折れ線 L_n において, x 座標が $x_0 = a$ から $x_n = b$ に増加すると, y 座標は

増加する.

折れ線 L_n において, x 座標が x_{k-1} から x_k に増加すると, y 座標は $F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ 増加する.

x 座標が x_0 から x_1 に増加すると y 座標は $F'(\xi_1)(x_1 - x_0)$ 増加し,

x 座標が x_1 から x_2 に増加すると y 座標は $F'(\xi_2)(x_2 - x_1)$ 増加し,

x 座標が x_2 から x_3 に増加すると y 座標は $F'(\xi_3)(x_3 - x_2)$ 増加し,

\vdots

x 座標が x_{n-1} から x_n に増加すると y 座標は $F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ 増加する.

これらを合計する. 折れ線 L_n において, x 座標が $x_0 = a$ から $x_n = b$ に増加すると, y 座標は

$$F'(\xi_1)(x_1 - x_0) + F'(\xi_2)(x_2 - x_1) + F'(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

$$= \sum_{k=1}^n \{F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

増加する.

折れ線 L_n において, x 座標が x_{k-1} から x_k に増加すると, y 座標は $F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ 増加する.

x 座標が x_0 から x_1 に増加すると y 座標は $F'(\xi_1)(x_1 - x_0)$ 増加し,

x 座標が x_1 から x_2 に増加すると y 座標は $F'(\xi_2)(x_2 - x_1)$ 増加し,

x 座標が x_2 から x_3 に増加すると y 座標は $F'(\xi_3)(x_3 - x_2)$ 増加し,

\vdots

x 座標が x_{n-1} から x_n に増加すると y 座標は $F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ 増加する.

これらを合計する. 折れ線 L_n において, x 座標が $x_0 = a$ から $x_n = b$ に増加すると, y 座標は

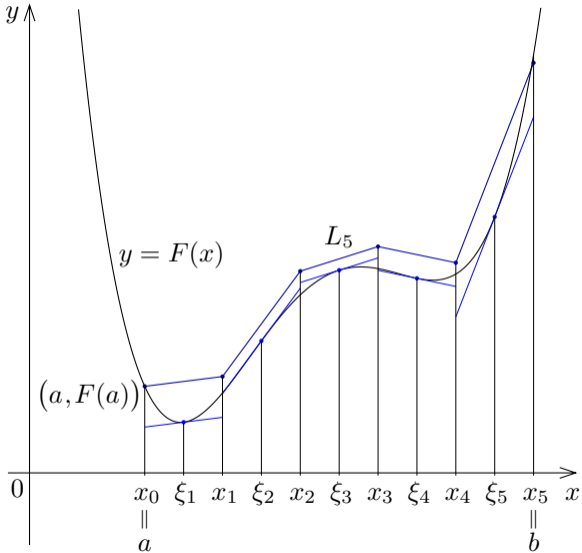
$$F'(\xi_1)(x_1 - x_0) + F'(\xi_2)(x_2 - x_1) + F'(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

$$= \sum_{k=1}^n \{F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

増加する. この y 座標の増加量を S_n とおく: $S_n = \sum_{k=1}^n \{F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$.

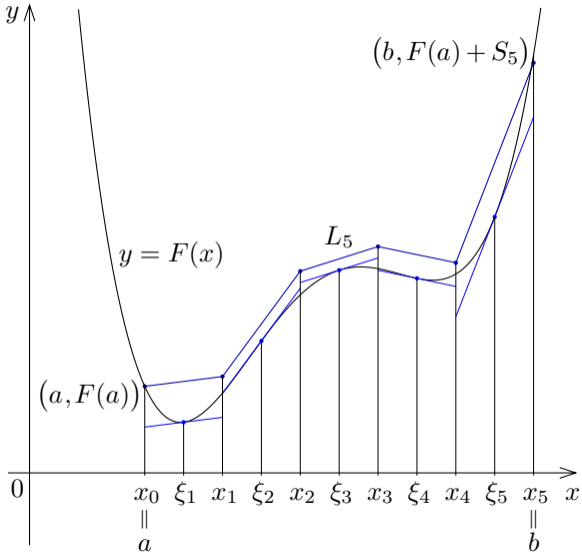
例えば $n = 5$ とする.

折れ線 L_5 において, x 座標が a から b に増加すると, y 座標は S_5 だけ増加する.

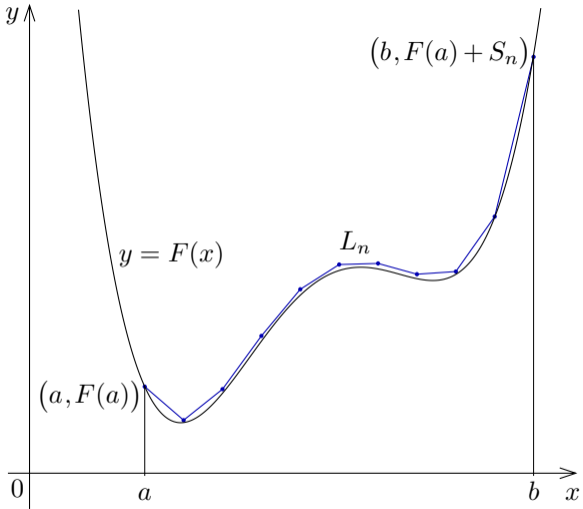


例えば $n = 5$ とする.

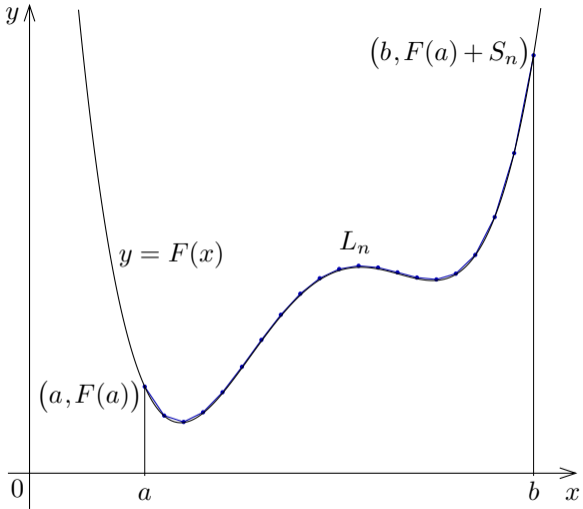
折れ線 L_5 において、 x 座標が a から b に増加すると、 y 座標は S_5 だけ増加する. 折れ線 L_5 の左端の点が $(a, F(a))$ なので、 L_n の右端の点は $(b, F(a) + S_5)$ である.



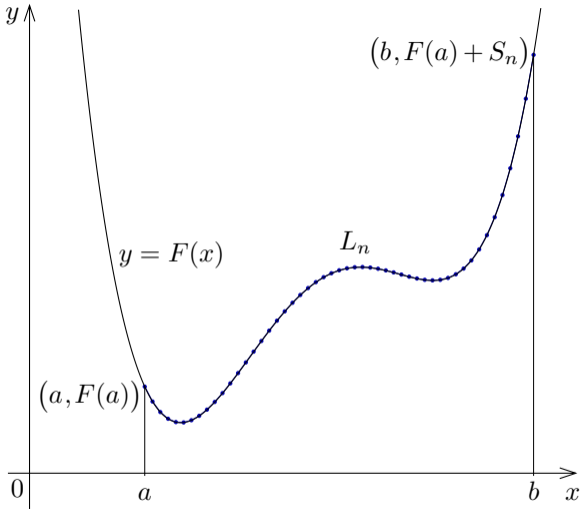
折れ線 L_n において、 x 座標が a から b に増加すると、 y 座標は S_n だけ増加する。



折れ線 L_n において、 x 座標が a から b に増加すると、 y 座標は S_n だけ増加する。折れ線 L_n の左端の点が $(a, F(a))$ なので、 L_n の右端の点は $(b, F(a) + S_n)$ である。

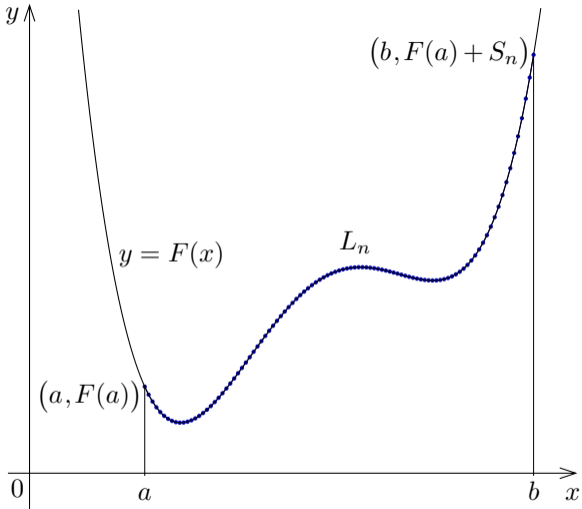


折れ線 L_n において、 x 座標が a から b に増加すると、 y 座標は S_n だけ増加する。折れ線 L_n の左端の点が $(a, F(a))$ なので、 L_n の右端の点は $(b, F(a) + S_n)$ である。 $n \rightarrow \infty$ のとき、折れ線 L_n は $y = F(x)$ のグラフに限りなく近づくので、 L_n の右端の点 $(b, F(a) + S_n)$ は $y = F(x)$ のグラフの点 $(b, F(b))$ に限りなく近づく。



折れ線 L_n において、 x 座標が a から b に増加すると、 y 座標は S_n だけ増加する。折れ線 L_n の左端の点が $(a, F(a))$ なので、 L_n の右端の点は $(b, F(a) + S_n)$ である。 $n \rightarrow \infty$ のとき、折れ線 L_n は $y = F(x)$ のグラフに限りなく近づくので、 L_n の右端の点 $(b, F(a) + S_n)$ は $y = F(x)$ のグラフの点 $(b, F(b))$ に限りなく近づく。 よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(a) + S_n\} = F(b) .$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(a) + S_n\} = F(b) ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(a) + S_n\} = F(b) ,$$

$F(a)$ は定数なので $\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(a) + S_n\} = F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, よって

$$F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = F(b) ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = F(b) - F(a) .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(a) + S_n\} = F(b) ,$$

$F(a)$ は定数なので $\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(a) + S_n\} = F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, よって

$$F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = F(b) ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = F(b) - F(a) .$$

$S_n = \sum_{k=1}^n \{F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は F の導関数 F' のリーマン和であり,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b F'(x) dx$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(a) + S_n\} = F(b) ,$$

$F(a)$ は定数なので $\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(a) + S_n\} = F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, よって

$$F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = F(b) ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = F(b) - F(a) .$$

$S_n = \sum_{k=1}^n \{F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は F の導関数 F' のリーマン和であり,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b F'(x) dx$. 故に

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(a) + S_n\} = F(b) ,$$

$F(a)$ は定数なので $\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(a) + S_n\} = F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, よって

$$F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = F(b) ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = F(b) - F(a) .$$

$S_n = \sum_{k=1}^n \{F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は F の導関数 F' のリーマン和であり,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b F'(x) dx$. 故に

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) .$$

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $F'(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

定積分はリーマン和の極限值であるが, リーマン和の極限值を計算するのは困難な事が多い. しかし, 微分積分の基本定理を用いるとしばしば定積分を比較的簡単に計算できる.

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

例 冪関数 x^2 の 2 から 5 までの定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ を考える.

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

例 冪関数 x^2 の 2 から 5 までの定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ を考える. 冪関数 x^2 は, 実数全体において連続なので, 2 から 5 まで積分可能である.

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

[例] 冪関数 x^2 の 2 から 5 までの定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ を考える. 冪関数 x^2 は, 実数全体において連続なので, 2 から 5 まで積分可能である. 関数 F を $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ とおくと,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 .$$

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

[例] 冪関数 x^2 の 2 から 5 までの定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ を考える. 冪関数 x^2 は, 実数全体において連続なので, 2 から 5 まで積分可能である. 関数 F を $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ とおくと,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 .$$

微分積分の基本定理により,

$$\int_2^5 x^2 dx = F(5) - F(2) = \frac{1}{3}5^3 - \frac{1}{3}2^3 = \frac{125 - 8}{3} = \frac{117}{3} = 39 .$$

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

例 冪関数 x^2 の 2 から 5 までの定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ を考える. 冪関数 x^2 は, 実数全体において連続なので, 2 から 5 まで積分可能である. 関数 F を $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ とおくと,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 .$$

微分積分の基本定理により,

$$\int_2^5 x^2 dx = F(5) - F(2) = \frac{1}{3}5^3 - \frac{1}{3}2^3 = \frac{125 - 8}{3} = \frac{117}{3} = 39 .$$

この計算は 6.2 節で行った $\int_2^5 x^2 dx$ の計算より至って簡単である.

終

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

例 指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ を考える.

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

例 指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ を考える. 指数関数 2^x は, 実数全体において連続なので, 3 から 8 まで積分可能である.

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

例 指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ を考える. 指数関数 2^x は, 実数全体において連続なので, 3 から 8 まで積分可能である.

$\frac{d}{dx}2^x = 2^x \ln 2$ なので,

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

[例] 指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ を考える. 指数関数 2^x は, 実数全体において連続なので, 3 から 8 まで積分可能である.

$\frac{d}{dx}2^x = 2^x \ln 2$ なので, 関数 F を $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$ とおくと,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx} \frac{2^x}{\ln 2} = \frac{2^x \ln 2}{\ln 2} = 2^x .$$

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

[例] 指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ を考える. 指数関数 2^x は, 実数全体において連続なので, 3 から 8 まで積分可能である. $\frac{d}{dx}2^x = 2^x \ln 2$ なので, 関数 F を $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$ とおくと,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx} \frac{2^x}{\ln 2} = \frac{2^x \ln 2}{\ln 2} = 2^x .$$

微分積分の基本定理により,

$$\int_3^8 2^x dx = F(8) - F(3) = \frac{2^8}{\ln 2} - \frac{2^3}{\ln 2} = \frac{256 - 8}{\ln 2} = \frac{248}{\ln 2} .$$

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

[例] 指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ を考える. 指数関数 2^x は, 実数全体において連続なので, 3 から 8 まで積分可能である. $\frac{d}{dx}2^x = 2^x \ln 2$ なので, 関数 F を $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$ とおくと,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx} \frac{2^x}{\ln 2} = \frac{2^x \ln 2}{\ln 2} = 2^x .$$

微分積分の基本定理により,

$$\int_3^8 2^x dx = F(8) - F(3) = \frac{2^8}{\ln 2} - \frac{2^3}{\ln 2} = \frac{256 - 8}{\ln 2} = \frac{248}{\ln 2} .$$

この計算は 6.2 節で行った $\int_3^8 2^x dx$ の計算より至って簡単である.

終

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

[例] 余弦関数 $\cos x$ の 0 から $\frac{\pi}{2}$ までの定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ を考える.

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

[例] 余弦関数 $\cos x$ の 0 から $\frac{\pi}{2}$ までの定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ を考える. 余弦関数 $\cos x$ は, 実数全体において連続なので, 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで積分可能である.

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

[例] 余弦関数 $\cos x$ の 0 から $\frac{\pi}{2}$ までの定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ を考える. 余弦関数 $\cos x$ は, 実数全体において連続なので, 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで積分可能である.

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x .$$

[微分積分の基本定理] 関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であり, a, b が属するある区間において関数 F が微分可能で $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

[例] 余弦関数 $\cos x$ の 0 から $\frac{\pi}{2}$ までの定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ を考える. 余弦関数 $\cos x$ は, 実数全体において連続なので, 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで積分可能である.

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x .$$

微分積分の基本定理により,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1 .$$

終

問6.3.1 $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ であることを用いて、定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$ を計算せよ.

関数 $\sin x$ は $\frac{\pi}{2}$ から π まで積分可能である.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx =$$

問6.3.1 $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ であることを用いて、定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$ を計算せよ.

関数 $\sin x$ は $\frac{\pi}{2}$ から π まで積分可能である.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = -\cos \pi - \left(-\cos \frac{\pi}{2}\right) = 1 .$$

終

例 微分公式 $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) を用いて、定積分

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を計算する.

例 微分公式 $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) を用いて、定積分

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を計算する. 関数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は $\frac{1}{2}$ から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ まで積分可能で

ある.

例 微分公式 $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) を用いて, 定積分

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を計算する. 関数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は $\frac{1}{2}$ から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ まで積分可能で

ある. $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) なので,

例 微分公式 $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) を用いて、定積分

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を計算する. 関数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は $\frac{1}{2}$ から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ まで積分可能で

ある. $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) なので、微分積分の基本定理により、

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} .$$

終

問6.3.2 微分公式 $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) を用いて、定積分 $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ を計算せよ.

関数 $\frac{1}{x}$ は 1 から e まで積分可能である.

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx =$$

問6.3.2 微分公式 $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) を用いて、定積分 $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ を計算せよ.

関数 $\frac{1}{x}$ は 1 から e まで積分可能である.

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln e - \ln 1 = 1 .$$

終

問6.3.3 微分公式 $\frac{d}{dx} \tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$ を用いて、定積分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$ を計算せよ.

関数 $\frac{1}{1+x^2}$ は 1 から $\sqrt{3}$ まで積分可能である.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx =$$

問6.3.3 微分公式 $\frac{d}{dx} \tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$ を用いて、定積分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$ を計算せよ.

関数 $\frac{1}{1+x^2}$ は 1 から $\sqrt{3}$ まで積分可能である.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} .$$

終

関数 F は実数 a が属す区間 I において微分可能とする. 更に, I の各実数 x に対して, F の導関数 F' は a から x まで積分可能であるとする.

関数 F は実数 a が属す区間 I において微分可能とする. 更に, I の各実数 x に対して, F の導関数 F' は a から x まで積分可能であるとする. 微分積分の基本定理により $\int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a)$ なので,

$$F(x) = \int_a^x F'(t) dt + F(a) .$$

関数 F は実数 a が属す区間 I において微分可能とする. 更に, I の各実数 x に対して, F の導関数 F' は a から x まで積分可能であるとする. 微分積分の基本定理により $\int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a)$ なので,

$$F(x) = \int_a^x F'(t) dt + F(a) .$$

つまり, 関数 F の導関数 F' を定積分すると, 元の関数 F の値を求めることができる. この意味で, 積分は微分の逆の操作である.

微分積分の基本定理の主要部を証明する.

微分積分の基本定理の主要部を証明する.

実数 a と b について $a < b$ のときを考える. 関数 f が実数 a から実数 b まで定積分可能であるとする. 更に, 区間 $[a, b]$ において関数 F は微分可能で $F'(x) = f(x)$ と仮定する. 等式 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ を導く.

微分積分の基本定理の主要部を証明する。

実数 a と b について $a < b$ のときを考える。関数 f が実数 a から実数 b まで定積分可能であるとする。更に、区間 $[a, b]$ において関数 F は微分可能で $F'(x) = f(x)$ と仮定する。等式 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ を導く。

正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり、 δ_n を次のように定める：

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} .$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする。

次の平均値の定理を述べた．実数 p と q について $p < q$ で，関数 F が区間 $[p, q]$ において微分可能であるならば，次のような実数 r がある：

$$F(q) - F(p) = F'(r)(q - p) \quad \text{かつ} \quad p < r < q .$$

次の平均値の定理を述べた. 実数 p と q について $p < q$ で, 関数 F が区間 $[p, q]$ において微分可能であるならば, 次のような実数 r がある:

$$F(q) - F(p) = F'(r)(q - p) \quad \text{かつ} \quad p < r < q .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して, $x_{k-1} < x_k$ で, F は区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で微分可能なので, 平均値の定理により次のような実数 ξ_k がある:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k .$$

次の平均値の定理を述べた．実数 p と q について $p < q$ で，関数 F が区間 $[p, q]$ において微分可能であるならば，次のような実数 r がある：

$$F(q) - F(p) = F'(r)(q - p) \quad \text{かつ} \quad p < r < q .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して， $x_{k-1} < x_k$ で， F は区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で微分可能なので，平均値の定理により次のような実数 ξ_k がある：

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k .$$

区間 $[a, b]$ において $F'(x) = f(x)$ と仮定した．実数 ξ_k は区間 $[a, b]$ に属するので $F'(\xi_k) = f(\xi_k)$ ， よって

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

次の平均値の定理を述べた. 実数 p と q について $p < q$ で, 関数 F が区間 $[p, q]$ において微分可能であるならば, 次のような実数 r がある:

$$F(q) - F(p) = F'(r)(q - p) \quad \text{かつ} \quad p < r < q .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して, $x_{k-1} < x_k$ で, F は区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で微分可能なので, 平均値の定理により次のような実数 ξ_k がある:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k .$$

区間 $[a, b]$ において $F'(x) = f(x)$ と仮定した. 実数 ξ_k は区間 $[a, b]$ に属するので $F'(\xi_k) = f(\xi_k)$, よって

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

これより

$$\sum_{k=1}^n \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

次の平均値の定理を述べた. 実数 p と q について $p < q$ で, 関数 F が区間 $[p, q]$ において微分可能であるならば, 次のような実数 r がある:

$$F(q) - F(p) = F'(r)(q - p) \quad \text{かつ} \quad p < r < q .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して, $x_{k-1} < x_k$ で, F は区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で微分可能なので, 平均値の定理により次のような実数 ξ_k がある:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k .$$

区間 $[a, b]$ において $F'(x) = f(x)$ と仮定した. 実数 ξ_k は区間 $[a, b]$ に属するので $F'(\xi_k) = f(\xi_k)$, よって

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

これより

$$\sum_{k=1}^n \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

この等式の右辺の式は関数 f のリーマン和である. これを S_n とおく:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} .$$

関数 f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ について,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{F(x_k) - F(x_{k-1})\}$$

関数 f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ について,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} \\ &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + F(x_4) - F(x_3) + \cdots \\ &\quad + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_n) - F(x_{n-1}) \end{aligned}$$

関数 f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ について,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} \\ &= \cancel{F(x_1)} - F(x_0) + \cancel{F(x_2)} - \cancel{F(x_1)} + \cancel{F(x_3)} - \cancel{F(x_2)} + \cancel{F(x_4)} - \cancel{F(x_3)} + \cdots \\ &\quad + \cancel{F(x_{n-2})} - \cancel{F(x_{n-3})} + \cancel{F(x_{n-1})} - \cancel{F(x_{n-2})} + F(x_n) - \cancel{F(x_{n-1})} \\ &= -F(x_0) + F(x_n) = F(x_n) - F(x_0) \end{aligned}$$

関数 f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ について,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} \\ &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + F(x_4) - F(x_3) + \cdots \\ &\quad + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ &= -F(x_0) + F(x_n) = F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(b) - F(a) . \end{aligned}$$

関数 f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ について,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} \\ &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + F(x_4) - F(x_3) + \cdots \\ &\quad + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ &= -F(x_0) + F(x_n) = F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(b) - F(a) . \end{aligned}$$

関数 f は a から b まで定積分可能であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので, f のリーマン

和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき f の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ に収束する: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$.

関数 f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ について,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} \\ &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + F(x_4) - F(x_3) + \cdots \\ &\quad + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ &= -F(x_0) + F(x_n) = F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(b) - F(a) . \end{aligned}$$

関数 f は a から b まで定積分可能であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので, f のリーマン

和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき f の定積分 $\int_a^b f(x) dx$

に収束する: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$. 故に,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{F(b) - F(a)\} = F(b) - F(a) .$$

関数 f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ について,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} \\ &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + F(x_4) - F(x_3) + \cdots \\ &\quad + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ &= -F(x_0) + F(x_n) = F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(b) - F(a) . \end{aligned}$$

関数 f は a から b まで定積分可能であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので, f のリーマン

和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき f の定積分 $\int_a^b f(x) dx$

に収束する: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$. 故に,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{F(b) - F(a)\} = F(b) - F(a) .$$

こうして微分積分の基本定理の主要部が証明された.

微分積分の基本定理は移動距離と移動速度との関係を考えて理解し易いと思われる。

物体が一定の向きに移動したとする．このとき物体は直線的に移動する．移動する時間と速度と距離とについて考える．

物体が一定の向きに移動したとする．このとき物体は直線的に移動する．移動する時間と速度と距離とについて考える．移動距離の単位を km とし，移動時間の単位を分とし，移動速度の単位を km/分 とする．

物体が一定の向きに移動したとする．このとき物体は直線的に移動する．移動する時間と速度と距離とについて考える．移動距離の単位を km とし，移動時間の単位を分とし，移動速度の単位を km/分 とする．移動時間 x に対して，移動距離を $F(x)$ とおき，移動速度を $f(x)$ とおく．移動速度 $f(x)$ は移動距離 $F(x)$ を微分したものであるので， $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ ．

物体が一定の向きに移動したとする．このとき物体は直線的に移動する．移動する時間と速度と距離とについて考える．移動距離の単位を km とし，移動時間の単位を分とし，移動速度の単位を km/分 とする．移動時間 x に対して，移動距離を $F(x)$ とおき，移動速度を $f(x)$ とおく．移動速度 $f(x)$ は移動距離 $F(x)$ を微分したものであるから， $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ ．移動時間を表す実数 a, b について $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ となることを説明する．

物体が一定の向きに移動したとする．このとき物体は直線的に移動する．移動する時間と速度と距離とについて考える．移動距離の単位を km とし，移動時間の単位を分とし，移動速度の単位を $\text{km}/\text{分}$ とする．移動時間 x に対して，移動距離を $F(x)$ とおき，移動速度を $f(x)$ とおく．移動速度 $f(x)$ は移動距離 $F(x)$ を微分したものであるため， $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ ．移動時間を表す実数 a, b について $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ となることを説明する．

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとる． $\delta_n \rightarrow 0$ とする．

移動時間が x_0 から x_1 までの時間 $x_1 - x_0$ を一定速度 $f(\xi_1)$ で移動し,
移動時間が x_1 から x_2 までの時間 $x_2 - x_1$ を一定速度 $f(\xi_2)$ で移動し,
移動時間が x_2 から x_3 までの時間 $x_3 - x_2$ を一定速度 $f(\xi_3)$ で移動し,

...

移動時間が x_{n-1} から x_n までの時間 $x_n - x_{n-1}$ を一定速度 $f(\xi_n)$ で移動した,
として近似する.

移動時間が x_0 から x_1 までの時間 $x_1 - x_0$ を一定速度 $f(\xi_1)$ で移動し,
移動時間が x_1 から x_2 までの時間 $x_2 - x_1$ を一定速度 $f(\xi_2)$ で移動し,
移動時間が x_2 から x_3 までの時間 $x_3 - x_2$ を一定速度 $f(\xi_3)$ で移動し,
...

移動時間が x_{n-1} から x_n までの時間 $x_n - x_{n-1}$ を一定速度 $f(\xi_n)$ で移動した,
として近似する. このとき, 近似的に,

移動時間が x_0 から x_1 までの間の移動距離は $f(\xi_1)(x_1 - x_0)$ であり,
移動時間が x_1 から x_2 までの間の移動距離は $f(\xi_2)(x_2 - x_1)$ であり,
移動時間が x_2 から x_3 までの間の移動距離は $f(\xi_3)(x_3 - x_2)$ であり,
...

移動時間が x_{n-1} から x_n までの間の移動距離は $f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ である.

移動時間が x_0 から x_1 までの時間 $x_1 - x_0$ を一定速度 $f(\xi_1)$ で移動し、
移動時間が x_1 から x_2 までの時間 $x_2 - x_1$ を一定速度 $f(\xi_2)$ で移動し、
移動時間が x_2 から x_3 までの時間 $x_3 - x_2$ を一定速度 $f(\xi_3)$ で移動し、
...

移動時間が x_{n-1} から x_n までの時間 $x_n - x_{n-1}$ を一定速度 $f(\xi_n)$ で移動した、
として近似する。このとき、近似的に、

移動時間が x_0 から x_1 までの間の移動距離は $f(\xi_1)(x_1 - x_0)$ であり、
移動時間が x_1 から x_2 までの間の移動距離は $f(\xi_2)(x_2 - x_1)$ であり、
移動時間が x_2 から x_3 までの間の移動距離は $f(\xi_3)(x_3 - x_2)$ であり、
...

移動時間が x_{n-1} から x_n までの間の移動距離は $f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ である。

これらの移動距離の総和

$$\begin{aligned} S_n &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \end{aligned}$$

が、移動時間が a から b までの間の物体の移動距離の近似になる。

$n \rightarrow \infty$ として移動時間の分割を限りなく細かくしていくと,

$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ が収束するとする. S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が移動距離になる.

$n \rightarrow \infty$ として移動時間の分割を限りなく細かくしていくと,

$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ が収束するとする. S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が移動距離になる. 移動時間 a における移動距離は $F(a)$ であり, 移動時間 b における移動距離は $F(b)$ である. よって, 移動時間が a から b までの間の移動距離は $F(b) - F(a)$ である.

$n \rightarrow \infty$ として移動時間の分割を限りなく細かくしていくと,

$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ が収束するとする. S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が移動距離になる. 移動時間 a における移動距離は $F(a)$ であり, 移動時間 b における移動距離は $F(b)$ である. よって, 移動時間が a から b までの間の移動距離は $F(b) - F(a)$ である. これより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = F(b) - F(a) .$$

$n \rightarrow \infty$ として移動時間の分割を限りなく細かくしていくと、

$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ が収束するとする. S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が移動距離になる. 移動時間 a における移動距離は $F(a)$ であり, 移動時間 b における移動距離は $F(b)$ である. よって, 移動時間が a から b までの間の移動距離は $F(b) - F(a)$ である. これより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = F(b) - F(a) .$$

$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $f(x)$ のリーマン和なので
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$. 故に

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

$n \rightarrow \infty$ として移動時間の分割を限りなく細かくしていくと、

$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ が収束するとする. S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が移動距離になる. 移動時間 a における移動距離は $F(a)$ であり, 移動時間 b における移動距離は $F(b)$ である. よって, 移動時間が a から b までの間の移動距離は $F(b) - F(a)$ である. これより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = F(b) - F(a) .$$

$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $f(x)$ のリーマン和なので
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$. 故に

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

このように, 移動速度 $f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が移動距離であることが微分積分の定理 (の例) である.