

6.2 定義に直接従う定積分の計算

定積分の定義を復習する.

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

と定める. 正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい,

を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}),$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$$

と定める. 正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい,

を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める。正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n =$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい、

を a から b までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す：

$$\int_a^b f(x) dx = \quad .$$

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める. 正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい, f のリーマン和 S_n の極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

関数 f が a から b まで積分可能であるとき、関数 f は b から a まで積分可能であるといい、 f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x) dx$ を次のように定義する：
$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx .$$

リーマン和の極限值として定積分を計算してみる.

例 定数 c に対して定数関数 $f(x) = c$ の定積分を計算する.

例 定数 c に対して定数関数 $f(x) = c$ の定積分を計算する. 定数 a と b とについて $a \leq b$ とする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, $f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える.

例 定数 c に対して定数関数 $f(x) = c$ の定積分を計算する. 定数 a と b とについて $a \leq b$ とする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, $f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える. $f(\xi_k) = c$ なので,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})$$

例 定数 c に対して定数関数 $f(x) = c$ の定積分を計算する. 定数 a と b について $a \leq b$ とする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, $f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える. $f(\xi_k) = c$ なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(\quad) \end{aligned}$$

例 定数 c に対して定数関数 $f(x) = c$ の定積分を計算する. 定数 a と b とについて $a \leq b$ とする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, $f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える. $f(\xi_k) = c$ なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(\cancel{x_1} - x_0 + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \cancel{x_3} - \cancel{x_2} + \cancel{x_4} - \cancel{x_3} + \cdots + \cancel{x_{n-1}} - \cancel{x_{n-2}} + x_n - \cancel{x_{n-1}}) \\ &= c(-x_0 + x_n) = c(x_n - x_0) \end{aligned}$$

例 定数 c に対して定数関数 $f(x) = c$ の定積分を計算する. 定数 a と b について $a \leq b$ とする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, $f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える. $f(\xi_k) = c$ なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(-x_0 + x_n) = c(x_n - x_0) \\ &= c(b - a) . \end{aligned}$$

例 定数 c に対して定数関数 $f(x) = c$ の定積分を計算する. 定数 a と b について $a \leq b$ とする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, $f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える. $f(\xi_k) = c$ なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(-x_0 + x_n) = c(x_n - x_0) \\ &= c(b - a) . \end{aligned}$$

つまり定数関数 $f(x) = c$ のリーマン和は常に $S_n = c(b - a)$ である.

例 定数 c に対して定数関数 $f(x) = c$ の定積分を計算する. 定数 a と b について $a \leq b$ とする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, $f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える. $f(\xi_k) = c$ なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(-x_0 + x_n) = c(x_n - x_0) \\ &= c(b - a). \end{aligned}$$

つまり定数関数 $f(x) = c$ のリーマン和は常に $S_n = c(b - a)$ である. よって

$$\int_a^b c dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{c(b - a)\}$$

例 定数 c に対して定数関数 $f(x) = c$ の定積分を計算する. 定数 a と b について $a \leq b$ とする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, $f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ を考える. $f(\xi_k) = c$ なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{c(x_k - x_{k-1})\} = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(-x_0 + x_n) = c(x_n - x_0) \\ &= c(b - a) . \end{aligned}$$

つまり定数関数 $f(x) = c$ のリーマン和は常に $S_n = c(b - a)$ である. よって

$$\int_a^b c dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{c(b - a)\} = c(b - a) .$$

$$\int_a^b c dx = c(b - a) .$$

特に, $a = 0$ とすると

$$\int_0^b c dx = bc .$$

終

$$\int_a^b c dx = c(b - a) .$$

特に, $a = 0$ とすると

$$\int_0^b c dx = bc .$$

終

このように掛け算は定数関数の定積分である. 定数関数の定積分以外にも様々な関数の定積分があるので, 定積分は掛け算の拡張である.

例 関数 x^2 の 2 から 5 までの定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ をリーマン和の極限值として計算する.

例 関数 x^2 の 2 から 5 までの定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ をリーマン和の極限值として計算する. 正の各自然数 n に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, 関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ を考える.

例 関数 x^2 の 2 から 5 までの定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ をリーマン和の極限值として計算する. 正の各自然数 n に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, 関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ を考える. 関数 x^2 は, 実数全体で連続なので, 2 から 5 まで積分可能である.

例 関数 x^2 の 2 から 5 までの定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ をリーマン和の極限值として計算する. 正の各自然数 n に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, 関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ を考える. 関数 x^2 は, 実数全体で連続なので, 2 から 5 まで積分可能である. よって, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束するならば, 関数 x^2 のリーマン和 S_n は定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ に収束する: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx$.

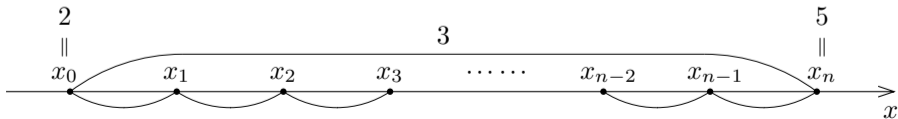
例 関数 x^2 の 2 から 5 までの定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ をリーマン和の極限值として計算する. 正の各自然数 n に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, 関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ を考える. 関数 x^2 は, 実数全体で連続なので, 2 から 5 まで積分可能である. よって, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束するならば, 関数 x^2 のリーマン和 S_n は定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ に収束する: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx$. この等式の左辺を計算するために, リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ の式を具体的に定める.

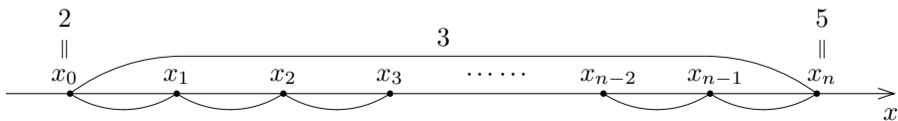
$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5 .$$

関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために、
 $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n$ を等間隔にする．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ は 数列になる．



$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5 .$$

関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために、 $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n$ を等間隔にする．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ は等差数列になる．

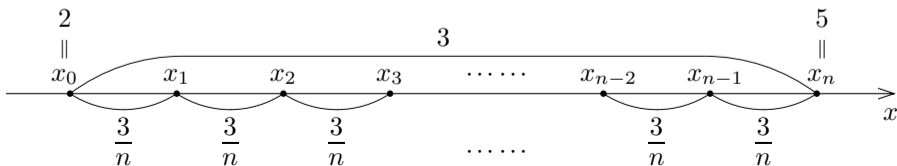


$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5 .$$

関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために、

$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ を等間隔にする．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ は等差数列にな

る．その公差を d とおくと、 $x_n = x_0 + dn$ なので $d = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{5 - 2}{n} = \frac{3}{n}$.



$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5 .$$

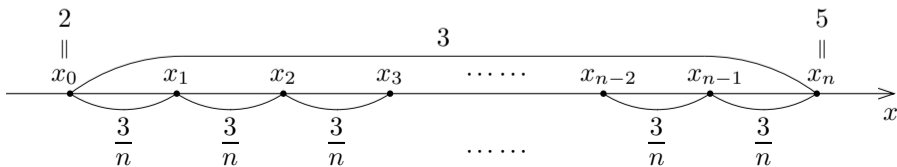
関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために、

$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ を等間隔にする．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ は等差数列にな

る．その公差を d とおくと、 $x_n = x_0 + dn$ なので $d = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{5 - 2}{n} = \frac{3}{n}$.

よって、自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ について

$$x_k = x_0 + dk = 2 + \frac{3}{n}k .$$



$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5 .$$

関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために、

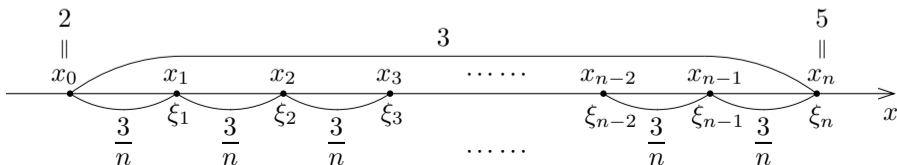
$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ を等間隔にする．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ は等差数列にな

る．その公差を d とおくと、 $x_n = x_0 + dn$ なので $d = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{5 - 2}{n} = \frac{3}{n}$.

よって、自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ について

$$x_k = x_0 + dk = 2 + \frac{3}{n}k .$$

更に自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $\xi_k = x_k = 2 + \frac{3}{n}k$ と定める．次の図のようになる．



$$x_1 - x_0 = d = \frac{3}{n}, x_2 - x_1 = d = \frac{3}{n}, x_3 - x_2 = d = \frac{3}{n}, \dots, x_n - x_{n-1} = d = \frac{3}{n}$$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n},$$

$$x_1 - x_0 = d = \frac{3}{n}, x_2 - x_1 = d = \frac{3}{n}, x_3 - x_2 = d = \frac{3}{n}, \dots, x_n - x_{n-1} = d = \frac{3}{n}$$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n},$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$.

$$x_1 - x_0 = d = \frac{3}{n}, x_2 - x_1 = d = \frac{3}{n}, x_3 - x_2 = d = \frac{3}{n}, \dots, x_n - x_{n-1} = d = \frac{3}{n}$$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n},$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$. これより, 関数 x^2 のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx .$$

$$x_1 - x_0 = d = \frac{3}{n}, \quad x_2 - x_1 = d = \frac{3}{n}, \quad x_3 - x_2 = d = \frac{3}{n}, \dots, \quad x_n - x_{n-1} = d = \frac{3}{n}$$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n},$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$. これより, 関数 x^2 のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して, $\xi_k = x_k = x_0 + dk = 2 + \frac{3}{n}k$,

$x_k - x_{k-1} = d = \frac{3}{n}$ なので,

$$x_1 - x_0 = d = \frac{3}{n}, \quad x_2 - x_1 = d = \frac{3}{n}, \quad x_3 - x_2 = d = \frac{3}{n}, \dots, \quad x_n - x_{n-1} = d = \frac{3}{n}$$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n},$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$. これより, 関数 x^2 のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して, $\xi_k = x_k = x_0 + dk = 2 + \frac{3}{n}k$,

$x_k - x_{k-1} = d = \frac{3}{n}$ なので,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2$$

$$x_1 - x_0 = d = \frac{3}{n}, \quad x_2 - x_1 = d = \frac{3}{n}, \quad x_3 - x_2 = d = \frac{3}{n}, \dots, \quad x_n - x_{n-1} = d = \frac{3}{n}$$

なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n},$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$. これより, 関数 x^2 のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^5 x^2 dx .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して, $\xi_k = x_k = x_0 + dk = 2 + \frac{3}{n}k$,

$x_k - x_{k-1} = d = \frac{3}{n}$ なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2 \\ &= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(4 + \frac{12}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left(\sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) . \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{3}{n} \left(\sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3}{n} \left(\sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \end{aligned}$$

定数 c 及び正の自然数 n について,

$$\sum_{k=1}^n c = nc, \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3}{n} \left(\sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \\ &= \frac{3}{n} \left\{ 4n + 6(n+1) + \frac{3}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right\} \\ &= 12 + 18 \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{3}{n} \left(\sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
 &= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \\
 &= \frac{3}{n} \left\{ 4n + 6(n+1) + \frac{3}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right\} \\
 &= 12 + 18 \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}
 \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ とするので

$$= 12 + 18 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) .$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n} \left(\sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + 6(n+1) + \frac{3}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right\} \\
&= 12 + 18 \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\
&= 12 + 18 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) .
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n} \left(\sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + 6(n+1) + \frac{3}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right\} \\
&= 12 + 18 \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\
&= 12 + 18 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) . \\
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 12 + 18 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n} \left(\sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + 6(n+1) + \frac{3}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right\} \\
&= 12 + 18 \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\
&= 12 + 18 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) . \\
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 12 + 18 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right\} \\
&= 12 + 18(1 + 0) + \frac{9}{2}(2 + 0 + 0) = 12 + 18 + 9 \\
&= 39 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{3}{n} \left(\sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right\} \\
&= \frac{3}{n} \left\{ 4n + 6(n+1) + \frac{3}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right\} \\
&= 12 + 18 \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\
&= 12 + 18 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) . \\
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 12 + 18 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right\} \\
&= 12 + 18(1 + 0) + \frac{9}{2}(2 + 0 + 0) = 12 + 18 + 9 \\
&= 39 .
\end{aligned}$$

故に $\int_2^5 x^2 dx = 39$.

終

問6.2.1 関数 x^2 は 1 から 4 まで積分可能である. 正の各自然数 n に対して,

$$1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ を次のように定める: $x_0 = 1$, 自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_k = \xi_k = 1 + \frac{3}{n}k$. 自

然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_1^4 x^2 dx$. 定積分 $\int_1^4 x^2 dx$ を関数 x^2 のリーマン和 S_n の極限值として計算せよ.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\quad \right)^2 \right\}$$

問6.2.1 関数 x^2 は 1 から 4 まで積分可能である. 正の各自然数 n に対して,

$$1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ を次のように定める: $x_0 = 1$, 自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_k = \xi_k = 1 + \frac{3}{n}k$. 自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_1^4 x^2 dx$. 定積分 $\int_1^4 x^2 dx$ を関数 x^2 のリーマン和 S_n の極限值として計算せよ.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} \\
&= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{6}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left(\sum_{k=1}^n 1 + \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ \right.
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \right.$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} \\
&= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{6}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left(\sum_{k=1}^n 1 + \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ n + \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \quad \quad \quad \right\}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} \\
&= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{6}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left(\sum_{k=1}^n 1 + \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ n + \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\
&= 3 + \frac{9(n+1)}{n} + \frac{9(2n^2 + 3n + 2)}{2n^2} \\
&= 3 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) . \\
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} \\
&= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{6}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left(\sum_{k=1}^n 1 + \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
&= \frac{3}{n} \left\{ n + \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\
&= 3 + \frac{9(n+1)}{n} + \frac{9(2n^2+3n+2)}{2n^2} \\
&= 3 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) . \\
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right\} \\
&= 3 + 9(1 + 0) + \frac{9}{2}(2 + 0 + 0) = 3 + 9 + 9 \\
&= 21 .
\end{aligned}$$

故に $\int_1^4 x^2 dx = 21$.

終

変数 x について $x \rightarrow \infty$ のとき $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ は正の定数に収束した。極限值

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ を e と書き表した： $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 。この定数を自然対数

の底といった。変数 x について $x \rightarrow -\infty$ のときも $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ は e に収束し

た： $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 。 $e \doteq 2.72$ と憶えること。

変数 x について $x \rightarrow \infty$ のとき $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ は正の定数に収束した。極限值

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ を e と書き表した： $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. この定数を自然対数

の底といった。変数 x について $x \rightarrow -\infty$ のときも $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ は e に収束し

た： $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. $e \doteq 2.72$ と憶えること。

変数 t を $t = \frac{1}{x}$ とおく。 $\frac{1}{t} = x$. $t > 0$ とすると、 $t \rightarrow +0$ のとき $x \rightarrow \infty$ なので

$$\lim_{t \rightarrow +0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e .$$

$t < 0$ とすると、 $t \rightarrow -0$ のとき $x \rightarrow -\infty$ なので

$$\lim_{t \rightarrow -0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e .$$

故に $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

例 指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ をリーマン和の極限值として計算する.

例 指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ をリーマン和の極限值として計算する. 正の各自然数 n に対して,

$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, 指数関数 2^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$ を考える.

例 指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ をリーマン和の極限值として計算する. 正の各自然数 n に対して,

$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, 指数関数 2^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$ を考える. 指数関数 2^x は, 実数全体で連続なので, 3 から 8 まで積分可能である.

例 指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ をリーマン和の極限值として計算する. 正の各自然数 n に対して,

$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, 指数関数 2^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$ を考える. 指数関数 2^x は, 実数全体で連続なので, 3 から 8 まで積分可能である. よって, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束するならば, 指数関数 2^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^x dx$ に収束する: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_3^8 2^x dx$.

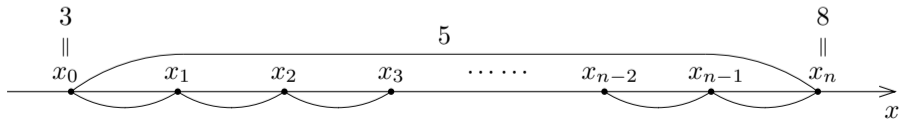
例 指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^x dx$ をリーマン和の極限值として計算する. 正の各自然数 n に対して,

$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, 指数関数 2^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$ を考える. 指数関数 2^x は, 実数全体で連続なので, 3 から 8 まで積分可能である. よって, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束するならば, 指数関数 2^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^x dx$ に収束する: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_3^8 2^x dx$. この等式の左辺を計算するために, リーマン和 S_n の式を具体的に定める.

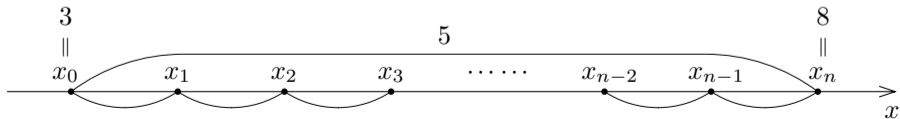
$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8 .$$

関数 2^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために, $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ を等間隔にする. 数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ は 数列になる.



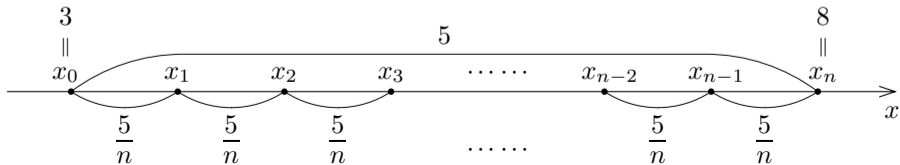
$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8.$$

関数 2^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために、 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ を等間隔にする。数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ は等差数列になる。



$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8 .$$

関数 2^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために, $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ を等間隔にする. 数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ は等差数列になる. その公差を d とおくと, $x_n = x_0 + dn$ なので $d = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{8 - 3}{n} = \frac{5}{n}$.



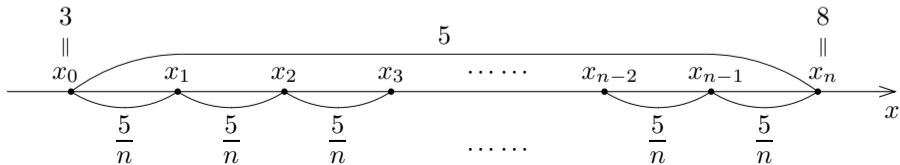
$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8 .$$

関数 2^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために、 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ を等間隔にする。数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ は等差数列になる。

その公差を d とおくと、 $x_n = x_0 + dn$ なので $d = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{8 - 3}{n} = \frac{5}{n}$.

よって、自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ について

$$x_k = x_0 + dk = 3 + \frac{5}{n}k .$$



$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8 .$$

関数 2^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の式を計算するために、 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ を等間隔にする．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ は等差数列になる．

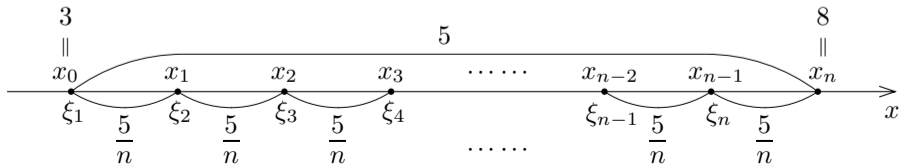
その公差を d とおくと、 $x_n = x_0 + dn$ なので $d = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{8 - 3}{n} = \frac{5}{n}$.

よって、自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ について

$$x_k = x_0 + dk = 3 + \frac{5}{n}k .$$

更に自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $\xi_k = x_{k-1} = 3 + \frac{5}{n}(k-1)$ と定める．

次の図のようになる．



自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = d = \frac{5}{n}$ なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n} ;$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = d = \frac{5}{n}$ なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n} ;$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0$.

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = d = \frac{5}{n}$ なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n};$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0$. これより, 指数関数 2^x のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^x dx$ に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_3^8 2^x dx .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = d = \frac{5}{n}$ なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n};$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0$. これより, 指数関数 2^x のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^x dx$ に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_3^8 2^x dx .$$

自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ について, $\xi_k = x_{k-1} = 3 + \frac{5}{n}(k-1)$,

$x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n}$ なので,

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = d = \frac{5}{n}$ なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n};$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0$. これより, 指数関数 2^x のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^x dx$ に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_3^8 2^x dx .$$

自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ について, $\xi_k = x_{k-1} = 3 + \frac{5}{n}(k-1)$,

$x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n}$ なので,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 2^{3 + \frac{5}{n}(k-1)} \frac{5}{n} \right\}$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = d = \frac{5}{n}$ なので,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n};$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0$. これより, 指数関数 2^x のリーマン和

$S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^x dx$ に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_3^8 2^x dx .$$

自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ について, $\xi_k = x_{k-1} = 3 + \frac{5}{n}(k-1)$,

$x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n}$ なので,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 2^{3 + \frac{5}{n}(k-1)} \frac{5}{n} \right\} = \frac{5}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 2^3 2^{\frac{5}{n}(k-1)} \right\} \\ &= \frac{5 \cdot 2^3}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}} \right)^{k-1} = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}} \right)^{k-1} . \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2\frac{5}{n}\right)^{k-1}$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1}$$

正の自然数 n 及び実数 a, r に対して, $r \neq 1$ のとき $\sum_{k=1}^n (ar^{k-1}) = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$.

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数 t を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく.

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数 t を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$, 両辺の自然対数を考えて
 $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$, $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$, $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数 t を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$, 両辺の自然対数を考えて $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$, $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$, $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1 + t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1 + t)}{t} .$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数 t を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$, 両辺の自然対数を考えて $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1+t)$, $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1+t)$, $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1+t)}{5 \ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1+t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2} \frac{\ln(1+t)}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$.

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数 t を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$, 両辺の自然対数を考えて $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1+t)$, $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1+t)$, $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1+t)}{5 \ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1+t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248 \ln(1+t)}{\ln 2} \frac{1}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$. 対数関数 $\ln x$ は連続なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数 t を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$, 両辺の自然対数を考えて $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$, $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$, $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1 + t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248 \ln(1 + t)}{\ln 2} \frac{1}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$. 対数関数 $\ln x$ は連続なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248 \ln(1 + t)}{\ln 2} \frac{1}{t} \right\} = \frac{248}{\ln 2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} \ln(1 + t) \right\}$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数 t を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$, 両辺の自然対数を考えて $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$, $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$, $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1 + t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248 \ln(1 + t)}{\ln 2} \frac{1}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$. 対数関数 $\ln x$ は連続なので,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248 \ln(1 + t)}{\ln 2} \frac{1}{t} \right\} = \frac{248}{\ln 2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} \ln(1 + t) \right\} \\ &= \frac{248}{\ln 2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} \\ &\quad \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数 t を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$, 両辺の自然対数を考えて $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$, $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$, $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1 + t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248 \ln(1 + t)}{\ln 2} \cdot \frac{1}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$. 対数関数 $\ln x$ は連続なので,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248 \ln(1 + t)}{\ln 2} \cdot \frac{1}{t} \right\} = \frac{248}{\ln 2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} \ln(1 + t) \right\} \\ &= \frac{248}{\ln 2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} = \frac{248}{\ln 2} \cdot \ln \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\} \\ &\qquad\qquad\qquad \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数 t を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$, 両辺の自然対数を考えて $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1 + t)$, $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$, $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1 + t)}{5 \ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1 + t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248 \ln(1 + t)}{\ln 2} \cdot \frac{1}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$. 対数関数 $\ln x$ は連続なので,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248 \ln(1 + t)}{\ln 2} \cdot \frac{1}{t} \right\} = \frac{248}{\ln 2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} \ln(1 + t) \right\} \\ &= \frac{248}{\ln 2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} = \frac{248}{\ln 2} \cdot \ln \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{248}{\ln 2} \cdot \ln e \\ &\qquad\qquad\qquad \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} .$$

変数 t を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおく. $2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$, 両辺の自然対数を考えて $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1+t)$, $\frac{5}{n} \ln 2 = \ln(1+t)$, $\frac{1}{n} = \frac{\ln(1+t)}{5 \ln 2}$ なので,

$$S_n = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40 \ln(1+t)}{5 \ln 2} \cdot \frac{31}{t} = \frac{248 \ln(1+t)}{\ln 2} \frac{1}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$. 対数関数 $\ln x$ は連続なので,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{248 \ln(1+t)}{\ln 2} \frac{1}{t} \right\} = \frac{248}{\ln 2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} \ln(1+t) \right\} \\ &= \frac{248}{\ln 2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{248}{\ln 2} \cdot \ln \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{248}{\ln 2} \cdot \ln e \\ &= \frac{248}{\ln 2} . \end{aligned} \quad \ln e = \log_e e = 1$$

故に $\int_3^8 2^x dx = \frac{248}{\ln 2}$.

終

問6.2.2 指数関数 3^x は 2 から 4 まで積分可能である. 正の各自然数 n に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ を次のように定める: $x_0 = 2$, 自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して, $x_k = 2 + \frac{2}{n}k$, $\xi_k = x_{k-1} = 2 + \frac{2}{n}(k-1)$. $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_k - x_{k-1} = \frac{2}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{2}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^4 3^x dx$. 定積分 $\int_2^4 3^x dx$ を関数 3^x のリーマン和 S_n の極限值として計算せよ.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \quad \quad \quad \right\} =$$

問6.2.2 指数関数 3^x は 2 から 4 まで積分可能である. 正の各自然数 n に対して,

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ を次のように定める: $x_0 = 2$, 自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して, $x_k = 2 + \frac{2}{n}k$, $\xi_k = x_{k-1} = 2 + \frac{2}{n}(k-1)$. $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_k - x_{k-1} = \frac{2}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{2}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_2^4 3^x dx$. 定積分 $\int_2^4 3^x dx$ を関数 3^x のリーマン和 S_n の極限值として計算せよ.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 3^{2 + \frac{2}{n}(k-1)} \frac{2}{n} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 3^{2 + \frac{2}{n}(k-1)} \frac{2}{n} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)} \right\} \\
 &= \frac{18}{n} \sum_{k=1}^n \left(3^{\frac{2}{n}} \right)^{k-1} = \frac{18}{n} \frac{\left(\quad \right)^n - 1}{\quad - 1} = \frac{18}{n} \frac{\quad - 1}{\quad - 1} = \frac{18}{n} \frac{\quad}{\quad} \\
 &= \frac{1}{n} \frac{\quad}{\quad} .
 \end{aligned}$$

変数 t を $t = \quad$ とおく. $3^{\frac{2}{n}} = \quad$, $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln(\quad)$,
 $\frac{2}{n} = \ln(\quad)$, $\frac{1}{n} = \quad$ なので,

$$S_n =$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $t = \quad \rightarrow \quad$ なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow \quad} \left\{ \quad \right\} =$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{3^{2+\frac{2}{n}(k-1)} \frac{2}{n}\right\} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)}\right\} \\
&= \frac{18}{n} \sum_{k=1}^n \left(3^{\frac{2}{n}}\right)^{k-1} = \frac{18}{n} \frac{\left(3^{\frac{2}{n}}\right)^n - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{3^2 - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{2}{3^{\frac{2}{n}} - 1} \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1}.
\end{aligned}$$

変数 t を $t = \frac{2}{n}$ とおく. $3^{\frac{2}{n}} = 3^t$, $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln(3^t)$,
 $\frac{2}{n} = \ln(3^t)$, $\frac{1}{n} = \frac{1}{2} \ln(3^t)$ なので,

$$S_n = \frac{1}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{1}{2} \frac{\ln(3^t)}{3^t - 1}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $t = \frac{2}{n} \rightarrow 0$ になるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\ln(3^t)}{3^t - 1} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 3^{2+\frac{2}{n}(k-1)} \frac{2}{n} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)} \right\} \\
&= \frac{18}{n} \sum_{k=1}^n \left(3^{\frac{2}{n}} \right)^{k-1} = \frac{18}{n} \frac{\left(3^{\frac{2}{n}} \right)^n - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{3^2 - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{8}{3^{\frac{2}{n}} - 1} \\
&= \frac{144}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} .
\end{aligned}$$

変数 t を $t =$ とおく. $3^{\frac{2}{n}} =$, $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln($) ,
 $\frac{2}{n} = \ln($) , $\frac{144}{n} =$ なので,

$$S_n =$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $t =$ \rightarrow なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \phantom{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n} \\ \phantom{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 3^{2+\frac{2}{n}(k-1)} \frac{2}{n} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)} \right\} \\
 &= \frac{18}{n} \sum_{k=1}^n \left(3^{\frac{2}{n}} \right)^{k-1} = \frac{18}{n} \frac{\left(3^{\frac{2}{n}} \right)^n - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{3^2 - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{8}{3^{\frac{2}{n}} - 1} \\
 &= \frac{144}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} .
 \end{aligned}$$

変数 t を $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1$ とおく. $3^{\frac{2}{n}} = 1 + t$, $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln(1 + t)$,
 $\frac{2}{n} \ln 3 = \ln(1 + t)$, $\frac{144}{n} = \frac{72 \ln(1 + t)}{\ln 3}$ なので,

$$S_n = \frac{144}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{72 \ln(1 + t)}{\ln 3} \cdot \frac{1}{t} = \frac{72}{\ln 3} \frac{\ln(1 + t)}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1 \rightarrow 3^0 - 1 = 0$ なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{72}{\ln 3} \frac{\ln(1 + t)}{t} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k} (x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 3^{2+\frac{2}{n}(k-1)} \frac{2}{n} \right\} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3^2 3^{\frac{2}{n}(k-1)} \right\} \\
&= \frac{18}{n} \sum_{k=1}^n \left(3^{\frac{2}{n}} \right)^{k-1} = \frac{18}{n} \frac{\left(3^{\frac{2}{n}} \right)^n - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{3^2 - 1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{18}{n} \frac{8}{3^{\frac{2}{n}} - 1} \\
&= \frac{144}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} .
\end{aligned}$$

変数 t を $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1$ とおく. $3^{\frac{2}{n}} = 1 + t$, $\ln 3^{\frac{2}{n}} = \ln(1 + t)$,
 $\frac{2}{n} \ln 3 = \ln(1 + t)$, $\frac{144}{n} = \frac{72 \ln(1 + t)}{\ln 3}$ なので,

$$S_n = \frac{144}{n} \frac{1}{3^{\frac{2}{n}} - 1} = \frac{72 \ln(1 + t)}{\ln 3} \cdot \frac{1}{t} = \frac{72}{\ln 3} \frac{\ln(1 + t)}{t} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $t = 3^{\frac{2}{n}} - 1 \rightarrow 3^0 - 1 = 0$ なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{72}{\ln 3} \frac{\ln(1 + t)}{t} \right\} = \frac{72}{\ln 3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} \ln(1 + t) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{72}{\ln 3} \frac{\ln(1+t)}{t} \right\} = \frac{72}{\ln 3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} \ln(1+t) \right\} \\
 &= \frac{72}{\ln 3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{72}{\ln 3} \cdot \ln \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{72}{\ln 3} \cdot \ln e \\
 &= \frac{72}{\ln 3} .
 \end{aligned}$$

故に $\int_2^4 3^x dx = \frac{72}{\ln 3} .$

終