

5. 拡充

冪関数・指数関数・対数関数の比などの極限值

以下の定理を証明する.

[定理 5. 拡充.1] $a > 1$ である任意の実数 a 及び任意の実数 p について,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 .$$

[定理 5. 拡充.2] $a > 0$ かつ $a \neq 1$ である任意の実数 a 及び $p > 0$ である任意の実数 p について,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0 .$$

[定理 5. 拡充.3] $a > 0$ かつ $a \neq 1$ である任意の実数 a 及び $p > 0$ である任意の実数 p について,

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x^p \log_a x) = 0 .$$

まず次の定理を証明する.

[定理] $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

e を自然対数の底とする. 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ と定める.

$$f'(x) = e^x - x - 1, \quad f''(x) = e^x - 1.$$

$x > 0$ のとき, $e^x > e^0 = 1$ なので $f''(x) = e^x - 1 > 0$. f' は区間 $[0, \infty)$ において単調増加なので, $x > 0$ のとき $f'(x) > f'(0) = 0$. f は区間 $[0, \infty)$ において単調増加なので, $x > 0$ のとき $f(x) > f(0) = 0$. よって, $x > 0$ のとき,

$$e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 > 0,$$

$$e^x > \frac{1}{2}x^2 + x + 1 > 1.$$

$x > 0$ のとき,

$$e^x > \frac{1}{2}x^2 + x + 1 > 1 ,$$

$$0 < \frac{x}{e^x} < \frac{x}{\frac{1}{2}x^2 + x + 1} = \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} .$$

ここで

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \frac{2}{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) = 0 \cdot 2 \\ &= 0 . \end{aligned}$$

故に $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

[定理] $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

実数 a について $a > 1$ とする. 実数 p について $p > 0$ とする. 変数 y を $y = \frac{x \ln a}{p}$ とおく. $x = \frac{py}{\ln a}$.

$$a^x = (e^{\ln a})^{\frac{py}{\ln a}} = e^{py} ,$$

$$\frac{x^p}{a^x} = \frac{\left(\frac{py}{\ln a}\right)^p}{e^{py}} = \left(\frac{p}{\ln a}\right)^p \frac{y^p}{(e^y)^p} = \left(\frac{p}{\ln a}\right)^p \left(\frac{y}{e^y}\right)^p .$$

$a > 1$ かつ $p > 0$ なので, $x \rightarrow \infty$ のとき $y = \frac{py}{\ln a} \rightarrow \infty$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{e^y} = 0$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{p}{\ln a}\right)^p \left(\frac{y}{e^y}\right)^p \right\} = \left(\frac{p}{\ln a}\right)^p \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^y}\right)^p = 0 .$$

実数 a について $a > 1$ で, 実数 p について $p \leq 0$ のとき, $x \geq 1$ のとき $x^p \leq 1$ なので, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$.

故に, $a > 1$ である任意の実数 a 及び任意の実数 p について $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$.

[定理] $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

実数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 実数 p について $p > 0$ とする. 変数 y を $y = p \ln x$ とおく. $\ln x = \frac{y}{p}$. $e^y = e^{p \ln x} = (e^{\ln x})^p = x^p$ なので

$$\frac{\log_a x}{x^p} = \frac{\frac{\ln x}{\ln a}}{x^p} = \frac{1}{\ln a} \frac{\ln x}{x^p} = \frac{1}{\ln a} \frac{\frac{y}{p}}{e^y} = \frac{1}{p \ln a} \frac{y}{e^y} .$$

$p > 0$ なので, $x \rightarrow \infty$ のとき $y = p \ln x \rightarrow \infty$. $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^y} = 0$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x^p} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p \ln a} \frac{y}{e^y} \right) = 0 .$$

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ である任意の実数 a 及び $p > 0$ である任意の実数 p について $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$.

[定理] $a > 0$ かつ $a \neq 1$ である任意の実数 a 及び $p > 0$ である任意の実数 p について $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$.

実数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 実数 p について $p > 0$ とする. 変数 x について $x > 0$ とする. 変数 y を $y = \frac{1}{x}$ とおく. $x = \frac{1}{y}$.

$$x^p \log_a x = \left(\frac{1}{y}\right)^p \log_a \frac{1}{y} = -\frac{\log_a y}{y^p} .$$

$x \rightarrow +0$ のとき $y = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$. $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\log_a y}{y^p} = 0$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x^p \log_a x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log_a y}{y^p}\right) = 0 .$$

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ である任意の実数 a 及び $p > 0$ である任意の実数 p について $\lim_{x \rightarrow +0} (x^p \log_a x) = 0$.