5.7 不等式の証明

区間 I を定義域とする関数 f と g とに関する述語

“区間 I の任意の実数 x について $f(x) \geq g(x)$ ”

は次の述語と同値である：

“区間 I の任意の実数 x について $f(x) - g(x) \geq 0$ ” ；

区間 I を定義域とする関数 f と g とに関する述語

“区間 I の任意の実数 x について $f(x) \geq g(x)$ ”

は次の述語と同値である：

“区間 I の任意の実数 x について $f(x) - g(x) \geq 0$ ” ；

更にこの述語は次の述語と同値である：

“区間 I を定義域とする関数 $f(x) - g(x)$ の最小値は 0 以上である”．

区間 I を定義域とする関数 f と g とに関する述語

“区間 I の任意の実数 x について $f(x) \geq g(x)$ ”

は次の述語と同値である：

“区間 I の任意の実数 x について $f(x) - g(x) \geq 0$ ” ；

更にこの述語は次の述語と同値である：

“区間 I を定義域とする関数 $f(x) - g(x)$ の最小値は 0 以上である”.

こうして次のことが分かる：

“区間 I の任意の実数 x に付いて $f(x) \geq g(x)$ である”

ことを示すためには,

“区間 I を定義域とする関数 $f(x) - g(x)$ の最小値は 0 以上である”

ことを示せばよい.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\dfrac{9}{x} \geq 6 - x$.

例　次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ ．不等式 $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ を導くために，不等式 $\dfrac{9}{x}-(6-x) \geq 0$ を導く；

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ ．不等式 $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ を導くために，不等式 $\dfrac{9}{x}-(6-x) \geq 0$ を導く；そのために，関数 f を $f(x)=\dfrac{9}{x}-(6-x)$ とおいて，$f(x) \geq 0$ であることを示す；

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ ．不等式 $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ を導くために，不等式 $\dfrac{9}{x}-(6-x) \geq 0$ を導く；そのために，関数 f を $f(x)=\dfrac{9}{x}-(6-x)$ とおいて，$f(x) \geq 0$ であることを示す；つまり，関数 f の最小値が 0 以上であることをいう．

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ ．正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{9}{x}-(6-x)$ （ $x>0$ ）と定める．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\dfrac{9}{x} \geq 6 - x$ ．正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{9}{x} - (6 - x)$ （ $x > 0$ ）と定める．

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \qquad (\ x > 0 \ ) .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\dfrac{9}{x} \geq 6 - x$．正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{9}{x} - (6 - x)$ （ $x > 0$ ）と定める.

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \qquad (x > 0).$$

$f'(x) = 0$ とすると， $\dfrac{x^2 - 9}{x^2} = 0$ より $x^2 - 9 = 0$， $x = \pm 3$， $x > 0$ なので $x = 3$．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ ．正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{9}{x}-(6-x)$ （ $x>0$ ）と定める．

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2}-(-1) = 1-\frac{9}{x^2} = \frac{x^2-9}{x^2} \qquad (\ x>0\ ).$$

$f'(x)=0$ とすると， $\dfrac{x^2-9}{x^2}=0$ より $x^2-9=0$ ， $x=\pm3$ ， $x>0$ なので $x=3$ ．

$$0<x<3 \text{ のとき，} x^2<3^2=9 \text{ なので } f'(x)=\frac{x^2-9}{x^2}<0 \text{ ．}$$

$$x>3 \text{ のとき，} x^2>3^2=9 \text{ なので } f'(x)=\frac{x^2-9}{x^2}>0 \text{ ．}$$

例 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\dfrac{9}{x} \geq 6 - x$ ．正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{9}{x} - (6-x)$ （ $x > 0$ ）と定める．

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2-9}{x^2} \qquad (x > 0) .$$

$f'(x) = 0$ とすると，$\dfrac{x^2-9}{x^2} = 0$ より $x^2 - 9 = 0$ ，$x = \pm 3$ ，$x > 0$ なので $x = 3$ ．

$$0 < x < 3 \text{ のとき，} x^2 < 3^2 = 9 \text{ なので } f'(x) = \frac{x^2-9}{x^2} < 0 .$$

$$x > 3 \text{ のとき，} x^2 > 3^2 = 9 \text{ なので } f'(x) = \frac{x^2-9}{x^2} > 0 .$$

従って，関数 f は，区間 $(0,3]$ において単調減少であり，区間 $[3,\infty)$ において単調増加である．

例 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ ．正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{9}{x}-(6-x)$ （ $x>0$ ）と定める．

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2}-(-1) = 1-\frac{9}{x^2} = \frac{x^2-9}{x^2} \qquad (\ x>0\ ).$$

$f'(x)=0$ とすると， $\dfrac{x^2-9}{x^2}=0$ より $x^2-9=0$ ， $x=\pm 3$ ， $x>0$ なので $x=3$ ．

$0<x<3$ のとき，$x^2<3^2=9$ なので $f'(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2}<0$ ．

$x>3$ のとき，$x^2>3^2=9$ なので $f'(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2}>0$ ．

従って，関数 f は，区間 $(0,3]$ において単調減少であり，区間 $[3,\infty)$ において単調増加である．よって，f の最小値は $f(3)=0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ ．正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{9}{x}-(6-x)$ （ $x>0$ ）と定める．

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2}-(-1) = 1-\frac{9}{x^2} = \frac{x^2-9}{x^2} \qquad (\ x>0 \ ) .$$

$f'(x)=0$ とすると， $\dfrac{x^2-9}{x^2}=0$ より $x^2-9=0$ ， $x=\pm 3$ ， $x>0$ なので $x=3$ ．

$$0<x<3 \text{ のとき，} x^2<3^2=9 \text{ なので } f'(x)=\frac{x^2-9}{x^2}<0 \text{ ．}$$

$$x>3 \text{ のとき，} x^2>3^2=9 \text{ なので } f'(x)=\frac{x^2-9}{x^2}>0 \text{ ．}$$

従って，関数 f は，区間 $(0,3]$ において単調減少であり，区間 $[3,\infty)$ において単調増加である．よって， f の最小値は $f(3)=0$ ．故に，任意の正の実数 x について， $f(x) \geq 0$ つまり $\dfrac{9}{x}-(6-x) \geq 0$ なので， $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 5.7.1}$ 次のことを証明せよ：任意の正の実数 x について $\dfrac{4}{x^2} \geq 3 - x$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - (3 - x)$ ($x > 0$) と定める.

$$f'(x) = \qquad\qquad = \frac{\qquad}{\qquad} \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $\dfrac{\qquad}{\qquad} = 0$, $\qquad = 0$, $(\qquad)(\qquad\qquad) = 0$,
x は実数なので $x = \quad$. $0 < x < \quad$ のとき, $x^3 < \quad = \quad$ なので
$f'(x) = \dfrac{\qquad}{\qquad} \quad 0$. $x > \quad$ のとき, $x^3 > \quad = \quad$ なので $f'(x) = \dfrac{\qquad}{\qquad} \quad 0$.
関数 f は, 区間 $(0, \ ]$ において単調　　であり, 区間 $[\ , \infty)$ において単調
　である. よって, f の最　値は $f(\ ) = \quad$. 故に, 任意の正の実数 x について, $f(x)$ 　　つまり　　　　　　≥ 0 なので, $\dfrac{4}{x^2} \geq 3 - x$.

問5.7.1 次のことを証明せよ：任意の正の実数 x について $\dfrac{4}{x^2} \geq 3 - x$ ．

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - (3 - x)$ （ $x > 0$ ）と定める．

$$f'(x) = -\frac{8}{x^3} + 1 = \frac{x^3 - 8}{x^3} \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると， $\dfrac{x^3 - 8}{x^3} = 0$ ， $x^3 - 8 = 0$ ， $(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$ ，
x は実数なので $x = 2$ ． $0 < x < 2$ のとき， $x^3 < \quad = \quad$ なので
$f'(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^3} \quad 0$ ． $x > 2$ のとき， $x^3 > \quad = \quad$ なので $f'(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^3} \quad 0$ ．
関数 f は，区間 $(0, \quad]$ において単調　　であり，区間 $[\quad , \infty)$ において単調　　である．よって，f の最　値は $f(\quad) = \quad$ ．故に，任意の正の実数 x について，$f(x)$ 　　　つまり　　　　　　　　≥ 0 なので， $\dfrac{4}{x^2} \geq 3 - x$ ．

$\boxed{問5.7.1}$ 次のことを証明せよ：任意の正の実数 x について $\dfrac{4}{x^2} \geq 3 - x$.

正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - (3-x)$ ($x > 0$) と定める.

$$f'(x) = -\frac{8}{x^3} + 1 = \frac{x^3-8}{x^3} \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $\dfrac{x^3-8}{x^3} = 0$, $x^3 - 8 = 0$, $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$, x は実数なので $x = 2$. $0 < x < 2$ のとき, $x^3 < 2^3 = 8$ なので $f'(x) = \dfrac{x^3-8}{x^3} < 0$. $x > 2$ のとき, $x^3 > 2^3 = 8$ なので $f'(x) = \dfrac{x^3-8}{x^3} > 0$. 関数 f は, 区間 $(0,2]$ において単調減少であり, 区間 $[2,\infty)$ において単調増加である. よって, f の最小値は $f(2) = 0$. 故に, 任意の正の実数 x について, $f(x) \geq 0$ つまり $\dfrac{4}{x^2} - (3-x) \geq 0$ なので, $\dfrac{4}{x^2} \geq 3 - x$. $\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$.

例 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ ．不等式 $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ を導くために，不等式 $e^x - \dfrac{x+2}{e} \geq 0$ を導く；

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ ．不等式 $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ を導くために，不等式 $e^x - \dfrac{x+2}{e} \geq 0$ を導く；そのために，関数 f を $f(x) = e^x - \dfrac{x+2}{e}$ とおいて，$f(x) \geq 0$ であることを示す；

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ ．不等式 $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ を導くために，不等式 $e^x - \dfrac{x+2}{e} \geq 0$ を導く；そのために，関数 f を $f(x) = e^x - \dfrac{x+2}{e}$ とおいて， $f(x) \geq 0$ であることを示す；つまり，関数 f の最小値が 0 以上であることを示す.

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ ．実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \dfrac{x+2}{e}$ と定める．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ ．実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \dfrac{x+2}{e}$ と定める．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x - \frac{x+2}{e}\right) = e^x - \frac{1}{e} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ ．実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \dfrac{x+2}{e}$ と定める．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x - \frac{x+2}{e}\right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

$f'(x) = 0$ とすると， $e^x - \dfrac{1}{e} = 0$ なので $e^x = \dfrac{1}{e}$ ，よって $x = \ln\dfrac{1}{e} = -1$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ ．実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \dfrac{x+2}{e}$ と定める．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x - \frac{x+2}{e}\right) = e^x - \frac{1}{e} \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると， $e^x - \dfrac{1}{e} = 0$ なので $e^x = \dfrac{1}{e}$ ，よって $x = \ln \dfrac{1}{e} = -1$ ．

$x < -1$ のとき， $e^x < e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ なので $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{e} < 0$ ．

$x > -1$ のとき， $e^x > e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ なので $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{e} > 0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ ．実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \dfrac{x+2}{e}$ と定める．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x - \frac{x+2}{e}\right) = e^x - \frac{1}{e}\ .$$

$f'(x) = 0$ とすると， $e^x - \dfrac{1}{e} = 0$ なので $e^x = \dfrac{1}{e}$ ，よって $x = \ln\dfrac{1}{e} = -1$ ．

$$x < -1 \text{ のとき，} \quad e^x < e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ なので } f'(x) = e^x - \frac{1}{e} < 0\ .$$

$$x > -1 \text{ のとき，} \quad e^x > e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ なので } f'(x) = e^x - \frac{1}{e} > 0\ .$$

従って，関数 f は，区間 $(-\infty, -1]$ において単調減少であり，区間 $[-1, \infty)$ において単調増加である．

例 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ ．実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \dfrac{x+2}{e}$ と定める．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x - \frac{x+2}{e}\right) = e^x - \frac{1}{e} \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると， $e^x - \dfrac{1}{e} = 0$ なので $e^x = \dfrac{1}{e}$ ，よって $x = \ln\dfrac{1}{e} = -1$ ．

$x < -1$ のとき， $e^x < e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ なので $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{e} < 0$ ．

$x > -1$ のとき， $e^x > e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ なので $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{e} > 0$ ．

従って，関数 f は，区間 $(-\infty, -1]$ において単調減少であり，区間 $[-1, \infty)$ において単調増加である．よって，f の最小値は $f(-1) = e^{-1} - \dfrac{1}{e} = 0$ ．

例　次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ ．実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \dfrac{x+2}{e}$ と定める．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x - \frac{x+2}{e}\right) = e^x - \frac{1}{e} \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると， $e^x - \dfrac{1}{e} = 0$ なので $e^x = \dfrac{1}{e}$ ，よって $x = \ln\dfrac{1}{e} = -1$ ．

$$x < -1 \text{ のとき，} \quad e^x < e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ なので } f'(x) = e^x - \frac{1}{e} < 0 \ .$$

$$x > -1 \text{ のとき，} \quad e^x > e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ なので } f'(x) = e^x - \frac{1}{e} > 0 \ .$$

従って，関数 f は，区間 $(-\infty, -1]$ において単調減少であり，区間 $[-1, \infty)$ において単調増加である．よって，f の最小値は $f(-1) = e^{-1} - \dfrac{1}{e} = 0$ ．

故に，任意の実数 x について， $f(x) \geq 0$ つまり $e^x - \dfrac{x+2}{e} \geq 0$ なので，

$e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ ．　終

問5.7.2 次のことを証明せよ：任意の正の実数 x について $\ln x \leq ex-2$ ．

正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=ex-2-\ln x$ （ $x>0$ ）と定める． $f'(x)=$ 　　（ $x>0$ ）． $f'(x)=0$ とすると， 　$=0$ ， $x=$ 　． $0<x<$ 　のとき， $\dfrac{1}{x}$ 　なので $f'(x)=$ 　　0 ． $x>$ 　のとき， $\dfrac{1}{x}$ 　なので $f'(x)=$ 　　0 ．関数 f は，区間 $\left(0,\ \right]$ において単調　であり，区間 $\left[\ ,\infty\right)$ において単調　である．よって関数 f は　において最　値 $f\left(\ \right)=$ 　をとる．故に，任意の正の実数 x について， $f(x)$ 　0 つまり $ex-2-\ln x$ 　0 なので， $\ln x \leq ex-2$ ．

$\boxed{\text{問}5.7.2}$ 次のことを証明せよ：任意の正の実数 x について $\ln x \leq ex-2$ ．

正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=ex-2-\ln x$ （ $x>0$ ）と定める． $f'(x)=e-\dfrac{1}{x}$ （ $x>0$ ）． $f'(x)=0$ とすると， $e-\dfrac{1}{x}=0$ ， $x=\dfrac{1}{e}$ ． $0<x<\dfrac{1}{e}$ のとき， $\dfrac{1}{x}$ 　　なので $f'(x)=e-\dfrac{1}{x}$ 　 0 ． $x>\dfrac{1}{e}$ のとき， $\dfrac{1}{x}$ 　　なので $f'(x)=e-\dfrac{1}{x}$ 　 0 ．関数 f は，区間 $\left(0,\quad\right]$ において単調　　であり，区間 $\left[\quad,\infty\right)$ において単調　　である．よって関数 f は　　において最　値 $f\left(\quad\right)=$ 　　をとる．故に，任意の正の実数 x について， $f(x)$ 　 0 つまり $ex-2-\ln x$ 　 0 なので， $\ln x \leq ex-2$ ．

$\boxed{\text{問}5.7.2}$ 次のことを証明せよ：任意の正の実数 x について $\ln x \leq ex - 2$ ．

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = ex - 2 - \ln x$ （ $x > 0$ ）と定める． $f'(x) = e - \dfrac{1}{x}$ （ $x > 0$ ）． $f'(x) = 0$ とすると， $e - \dfrac{1}{x} = 0$ ， $x = \dfrac{1}{e}$ ． $0 < x < \dfrac{1}{e}$ のとき， $\dfrac{1}{x} > e$ なので $f'(x) = e - \dfrac{1}{x} < 0$ ． $x > \dfrac{1}{e}$ のとき， $\dfrac{1}{x} < e$ なので $f'(x) = e - \dfrac{1}{x} > 0$ ．関数 f は，区間 $\left(0, \dfrac{1}{e}\right]$ において単調減少であり，区間 $\left[\dfrac{1}{e}, \infty\right)$ において単調増加である．よって関数 f は $\dfrac{1}{e}$ において最小値 $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0$ をとる．故に，任意の正の実数 x について， $f(x) \geq 0$ つまり $ex - 2 - \ln x \geq 0$ なので， $\ln x \leq ex - 2$ ． $\boxed{\text{終}}$