

5.5 関数の最大値最小値

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という.

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という。

正確な定義を述べる。

関数 f の値の範囲（値域）の中で、最も大きい実数のことを f の最大値といい、最も小さい実数のことを f の最小値という。

正確な定義を述べる．関数 f の定義域に属す実数 p について、 f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) .$$

関数 f の値の範囲（値域）の中で、最も大きい実数のことを f の最大値といい、最も小さい実数のことを f の最小値という。

正確な定義を述べる。関数 f の定義域に属す実数 p について、 f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) .$$

f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x) .$$

関数 f の値の範囲（値域）の中で、最も大きい実数のことを f の最大値といい、最も小さい実数のことを f の最小値という。

正確な定義を述べる．関数 f の定義域に属す実数 p について、 f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) .$$

f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x) .$$

関数の最大値・最小値は、各々、あるとしても唯一つだけである．最大値・最小値は無いこともある．

最大値・最小値を調べる問題では、通常、最大値および最小値だけでなく、最大値をとる実数および最小値をとる実数も調べること。

最大値・最小値を調べる問題では、通常、最大値および最小値だけでなく、最大値をとる実数および最小値をとる実数も調べること。また、最大値・最小値を調べる問題では、最大値がないときは“最大値はない”ことを記し、最小値がないときは“最小値はない”ことを記すこと。

例 区間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
($-1 \leq x \leq 4$) と定める. 関数 φ の最大値・最小値を調べる.

例 区間 $[-1, 4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ($-1 \leq x \leq 4$) と定める. 関数 φ の最大値・最小値を調べる. 区間 $[-1, 4]$ の各実数 x について

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) \\ &= 3(x - 1)(x - 3) .\end{aligned}$$

例 区間 $[-1, 4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ($-1 \leq x \leq 4$) と定める. 関数 φ の最大値・最小値を調べる. 区間 $[-1, 4]$ の各実数 x について

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) \\ &= 3(x-1)(x-3) .\end{aligned}$$

実数 p について $\varphi'(p) = 0$ とすると, $3(p-1)(p-3) = 0$ なので, $p = 1, 3$.

例 区間 $[-1, 4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ($-1 \leq x \leq 4$) と定める. 関数 φ の最大値・最小値を調べる. 区間 $[-1, 4]$ の各実数 x について

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) \\ &= 3(x-1)(x-3) .\end{aligned}$$

実数 p について $\varphi'(p) = 0$ とすると, $3(p-1)(p-3) = 0$ なので, $p = 1, 3$.
更に,

$$\varphi(-1) = -16, \quad \varphi(1) = 4, \quad \varphi(3) = 0, \quad \varphi(4) = 4 .$$

$$\varphi(-1) = -16, \quad \varphi(1) = 4, \quad \varphi(3) = 0, \quad \varphi(4) = 4.$$

増減表は次のようになる.

| | | | | | | | |
|---------------------------------|-----|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | -1 | ... | 1 | ... | 3 | ... | 4 |
| $x - 1$ | | | | | | | |
| $x - 3$ | | | | | | | |
| $\varphi'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$ | | | | | | | |
| $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ | -16 | | 4 | | 0 | | 4 |

$$\varphi(-1) = -16, \quad \varphi(1) = 4, \quad \varphi(3) = 0, \quad \varphi(4) = 4.$$

増減表は次のようになる.

| | | | | | | | |
|---------------------------------|-----|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | -1 | ... | 1 | ... | 3 | ... | 4 |
| $x - 1$ | - | - | 0 | + | + | + | + |
| $x - 3$ | - | - | - | - | 0 | + | + |
| $\varphi'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$ | | | | | | | |
| $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ | -16 | | 4 | | 0 | | 4 |

$$\varphi(-1) = -16, \quad \varphi(1) = 4, \quad \varphi(3) = 0, \quad \varphi(4) = 4.$$

増減表は次のようになる.

| | | | | | | | |
|---------------------------------|-----|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | -1 | ... | 1 | ... | 3 | ... | 4 |
| $x - 1$ | - | - | 0 | + | + | + | + |
| $x - 3$ | - | - | - | - | 0 | + | + |
| $\varphi'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$ | + | + | 0 | - | 0 | + | + |
| $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ | -16 | | 4 | | 0 | | 4 |

$$\varphi(-1) = -16, \quad \varphi(1) = 4, \quad \varphi(3) = 0, \quad \varphi(4) = 4.$$

増減表は次のようになる.

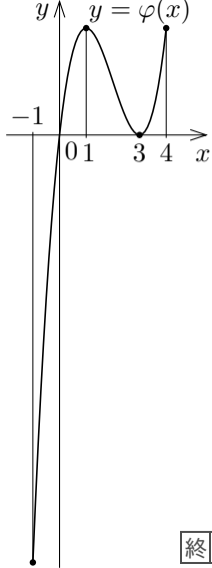
| | | | | | | | |
|---------------------------------|-----|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | -1 | ... | 1 | ... | 3 | ... | 4 |
| $x - 1$ | - | - | 0 | + | + | + | + |
| $x - 3$ | - | - | - | - | 0 | + | + |
| $\varphi'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$ | + | + | 0 | - | 0 | + | + |
| $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ | -16 | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ | 4 |

$$\varphi(-1) = -16, \quad \varphi(1) = 4, \quad \varphi(3) = 0, \quad \varphi(4) = 4.$$

増減表は次のようになる.

| | | | | | | | |
|--------------------------------|-----|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | -1 | ... | 1 | ... | 3 | ... | 4 |
| $x-1$ | - | - | 0 | + | + | + | + |
| $x-3$ | - | - | - | - | 0 | + | + |
| $\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$ | + | + | 0 | - | 0 | + | + |
| $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ | -16 | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ | 4 |

関数 φ は、1 と 4 とにおいて最大値 4 をとり、-1 において最小値 -16 をとる.



問5.5.1 区間 $[2, 7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ ($2 \leq x \leq 7$) と定める. ψ の最大値・最小値を調べよ.

区間 $[2, 7]$ の各実数 x について $\psi'(x) = \quad = -(\quad)(\quad)$.
 $\psi'(x) = 0$ とすると, $(\quad)(\quad) = 0$, $2 \leq x \leq 7$ より $x = \quad$. 更に,
 $\psi(2) = \quad$, $\psi(\quad) = \quad$, $\psi(7) = \quad$. 増減表は次のようになる.

| | | | | | |
|------------------------------|---|-----|--|-----|---|
| x | 2 | ... | | ... | 7 |
| | | | | | |
| $\psi'(x) = -(\quad)(\quad)$ | | | | | |
| $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ | | | | | |

関数 ψ は, \quad において最大値 \quad をとり, \quad と \quad において最小値 \quad をとる.

問5.5.1 区間 $[2, 7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ ($2 \leq x \leq 7$) と定める. ψ の最大値・最小値を調べよ.

区間 $[2, 7]$ の各実数 x について $\psi'(x) = -3x^2 + 16x - 5 = -(3x - 1)(x - 5)$. $\psi'(x) = 0$ とすると, $(3x - 1)(x - 5) = 0$, $2 \leq x \leq 7$ より $x = 5$. 更に, $\psi(2) = 14$, $\psi(5) = 50$, $\psi(7) = 14$. 増減表は次のようになる.

| | | | | | |
|-------------------------------|---|-----|--|-----|---|
| x | 2 | ... | | ... | 7 |
| $3x - 1$ | | | | | |
| $x - 5$ | | | | | |
| $\psi'(x) = -(3x - 1)(x - 5)$ | | | | | |
| $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ | | | | | |

関数 ψ は, において最大値 をとり, と において最小値 をとる.

問5.5.1 区間 $[2, 7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ ($2 \leq x \leq 7$) と定める. ψ の最大値・最小値を調べよ.

区間 $[2, 7]$ の各実数 x について $\psi'(x) = -3x^2 + 16x - 5 = -(3x - 1)(x - 5)$. $\psi'(x) = 0$ とすると, $(3x - 1)(x - 5) = 0$, $2 \leq x \leq 7$ より $x = 5$. 更に, $\psi(2) = 14$, $\psi(5) = 50$, $\psi(7) = 14$. 増減表は次のようになる.

| | | | | | |
|----------------------------------|----|-----|----|-----|----|
| x | 2 | ... | 5 | ... | 7 |
| $3x - 1$ | + | + | + | + | + |
| $x - 5$ | - | - | 0 | + | + |
| $\varphi'(x) = -(3x - 1)(x - 5)$ | + | + | 0 | - | - |
| $\varphi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ | 14 | ↗ | 50 | ↘ | 14 |

関数 ψ は, において最大値 をとり, と において最小値 をとる.

問5.5.1 区間 $[2, 7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ ($2 \leq x \leq 7$) と定める. ψ の最大値・最小値を調べよ.

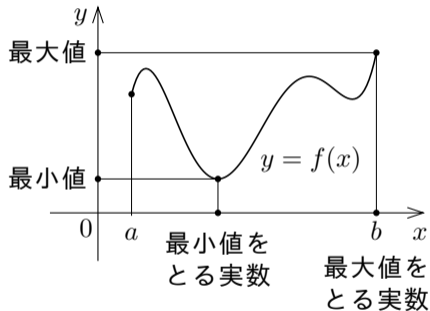
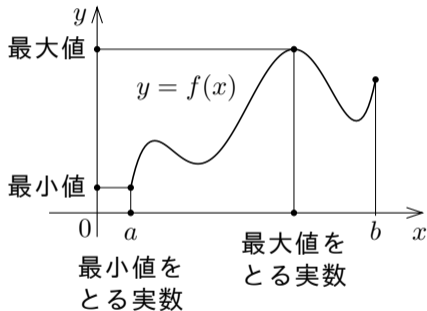
区間 $[2, 7]$ の各実数 x について $\psi'(x) = -3x^2 + 16x - 5 = -(3x - 1)(x - 5)$. $\psi'(x) = 0$ とすると, $(3x - 1)(x - 5) = 0$, $2 \leq x \leq 7$ より $x = 5$. 更に, $\psi(2) = 14$, $\psi(5) = 50$, $\psi(7) = 14$. 増減表は次のようになる.

| | | | | | |
|----------------------------------|----|-----|----|-----|----|
| x | 2 | ... | 5 | ... | 7 |
| $3x - 1$ | + | + | + | + | + |
| $x - 5$ | - | - | 0 | + | + |
| $\varphi'(x) = -(3x - 1)(x - 5)$ | + | + | 0 | - | - |
| $\varphi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ | 14 | ↗ | 50 | ↘ | 14 |

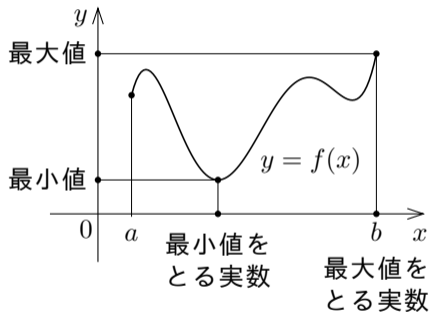
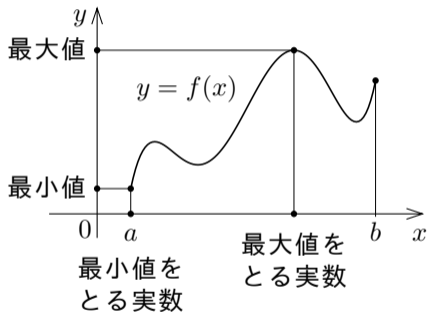
関数 ψ は, 5 において最大値 50 をとり, 2 と 7 とにおいて最小値 14 をとる.

終

実数 a, b について $a < b$ とする. 区間 $[a, b]$ を定義域とする関数 f は $[a, b]$ において微分可能であるとする. 座標平面の f のグラフにおいて, 最大値・最小値は例えば次の図のようになる.



実数 a, b について $a < b$ とする. 区間 $[a, b]$ を定義域とする関数 f は $[a, b]$ において微分可能であるとする. 座標平面の f のグラフにおいて, 最大値・最小値は例えば次の図のようになる.



次のことが成り立つ: f は,

極値をとる実数か a か b かのどれかにおいて最大値をとり,
 極値をとる実数か a か b かのどれかにおいて最小値をとる.

実数 a, b について $a < b$ で, 区間 $[a, b]$ を定義域とする関数 f は $[a, b]$ において微分可能であるとする. f は,

極値をとる実数が a か b かのどれかにおいて最大値をとり,
極値をとる実数が a か b かのどれかにおいて最小値をとる.

実数 a, b について $a < b$ で、区間 $[a, b]$ を定義域とする関数 f は $[a, b]$ において微分可能であるとする。 f は、

極値をとる実数か a か b かのどれかにおいて最大値をとり、

極値をとる実数か a か b かのどれかにおいて最小値をとる。

実数 p において f が極値をとるとき $f'(p) = 0$ なので、 f は、

$f'(p) = 0$ である実数 p か a か b かのどれかにおいて最大値をとり、

$f'(p) = 0$ である実数 p か a か b かのどれかにおいて最小値をとる。

実数 a, b について $a < b$ で、区間 $[a, b]$ を定義域とする関数 f は $[a, b]$ において微分可能であるとする。 f は、

極値をとる実数か a か b かのどれかにおいて最大値をとり、

極値をとる実数か a か b かのどれかにおいて最小値をとる。

実数 p において f が極値をとるとき $f'(p) = 0$ なので、 f は、

$f'(p) = 0$ である実数 p か a か b かのどれかにおいて最大値をとり、

$f'(p) = 0$ である実数 p か a か b かのどれかにおいて最小値をとる。

よって、 $f'(p) = 0$ である p に対する $f(p)$ と $f(a)$ と $f(b)$ との中で、最大の実数が f の最大値であり、最小の実数が f の最小値である。

例 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right) \cos x - \sin x$
 $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める. 関数 g の最大値・最小値を調べる.

例 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right) \cos x - \sin x$
 $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める. 関数 g の最大値・最小値を調べる. 区間
 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数について,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \left(x - \frac{6}{5}\right) \cos x - \sin x \right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right) (-\sin x) - \cos x \\ &= -\left(x - \frac{6}{5}\right) \sin x . \end{aligned}$$

例 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right) \cos x - \sin x$
 $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める. 関数 g の最大値・最小値を調べる. 区間
 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数について,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \left(x - \frac{6}{5}\right) \cos x - \sin x \right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right) (-\sin x) - \cos x \\ &= -\left(x - \frac{6}{5}\right) \sin x . \end{aligned}$$

$g'(x) = 0$ とする :

例 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right) \cos x - \sin x$
 $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める. 関数 g の最大値・最小値を調べる. 区間
 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数について,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \left(x - \frac{6}{5}\right) \cos x - \sin x \right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right) (-\sin x) - \cos x \\ &= -\left(x - \frac{6}{5}\right) \sin x . \end{aligned}$$

$g'(x) = 0$ とする: $-\left(x - \frac{6}{5}\right) \sin x = 0$ より $x - \frac{6}{5} = 0$ または $\sin x = 0$;

例 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right) \cos x - \sin x$
 $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める. 関数 g の最大値・最小値を調べる. 区間
 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数について,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \left(x - \frac{6}{5}\right) \cos x - \sin x \right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right) (-\sin x) - \cos x \\ &= -\left(x - \frac{6}{5}\right) \sin x . \end{aligned}$$

$g'(x) = 0$ とする: $-\left(x - \frac{6}{5}\right) \sin x = 0$ より $x - \frac{6}{5} = 0$ または $\sin x = 0$;
 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので, $x = \frac{6}{5}$ または $x = 0$.

例 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right) \cos x - \sin x$
 $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める. 関数 g の最大値・最小値を調べる. 区間
 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数について,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \left(x - \frac{6}{5}\right) \cos x - \sin x \right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right) (-\sin x) - \cos x \\ &= -\left(x - \frac{6}{5}\right) \sin x . \end{aligned}$$

$g'(x) = 0$ とする: $-\left(x - \frac{6}{5}\right) \sin x = 0$ より $x - \frac{6}{5} = 0$ または $\sin x = 0$;
 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので, $x = \frac{6}{5}$ または $x = 0$. 関数 g は, $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{6}{5}, \frac{\pi}{2}$ のう
ちの, どれかにおいて最大値をとり, どれかにおいて最小値をとる.

例 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right) \cos x - \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める. 関数 g の最大値・最小値を調べる. 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数について,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \left(x - \frac{6}{5}\right) \cos x - \sin x \right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right) (-\sin x) - \cos x \\ &= -\left(x - \frac{6}{5}\right) \sin x . \end{aligned}$$

$g'(x) = 0$ とする: $-\left(x - \frac{6}{5}\right) \sin x = 0$ より $x - \frac{6}{5} = 0$ または $\sin x = 0$; $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので, $x = \frac{6}{5}$ または $x = 0$. 関数 g は, $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{6}{5}, \frac{\pi}{2}$ のうちの, どれかにおいて最大値をとり, どれかにおいて最小値をとる.

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad g(0) = -\frac{6}{5}, \quad g\left(\frac{6}{5}\right) = -\sin \frac{6}{5}, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$

は単調増加なので, $0 < \frac{6}{5} < \frac{\pi}{2}$

より $\sin 0 < \sin \frac{6}{5} < \sin \frac{\pi}{2}$ な

ので $0 < \sin \frac{6}{5} < 1$, よって

$-1 < -\sin \frac{6}{5} < 0$ なので,

$$g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{6}{5}\right) < g\left(-\frac{\pi}{2}\right) .$$

区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$

は単調増加なので, $0 < \frac{6}{5} < \frac{\pi}{2}$

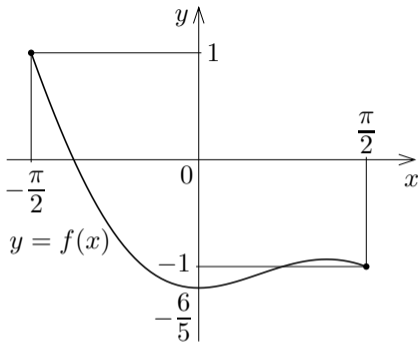
より $\sin 0 < \sin \frac{6}{5} < \sin \frac{\pi}{2}$ な

ので $0 < \sin \frac{6}{5} < 1$, よって

$-1 < -\sin \frac{6}{5} < 0$ なので,

$$g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{6}{5}\right) < g\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

関数 g は, $-\frac{\pi}{2}$ において最大値 1 をとり, 0 において最小値 $-\frac{6}{5}$ をとる.



終

問5.5.2 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right) \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数について,

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right) \cos x \right\} =$$

$f'(x) = 0$ とする: $\cos x = 0$ より $x = \pm \frac{\pi}{2}$ または $\sin x = 0$;

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので, $x = \pm \frac{\pi}{2}$ または $x = 0$. 関数 f は, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ のうちの, どれかにおいて最大値をとり, どれかにおいて最小値をとる.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \quad, \quad f(0) = \quad, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \quad, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \quad.$$

問5.5.2 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right) \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数について,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right) \cos x \right\} = \cos x - \cos x + \left(\frac{5}{4} - x\right)(-\sin x) \\ &= \left(x - \frac{5}{4}\right) \sin x . \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とする: $\left(x - \frac{5}{4}\right) \sin x = 0$ より $\sin x = 0$ または $x - \frac{5}{4} = 0$;

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので, $x = \frac{5}{4}$ または $x = -\frac{\pi}{2}$. 関数 g は, $\sin x$, $\cos x$, x のうちの, どれかにおいて最大値をとり, どれかにおいて最小値をとる.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \quad , \quad f\left(\frac{5}{4}\right) = \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \quad , \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \quad .$$

問5.5.2 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right) \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数について,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right) \cos x \right\} = \cos x - \cos x + \left(\frac{5}{4} - x\right)(-\sin x) \\ &= \left(x - \frac{5}{4}\right) \sin x . \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とする: $\left(x - \frac{5}{4}\right) \sin x = 0$ より $x - \frac{5}{4} = 0$ または $\sin x = 0$;
 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので, $x = \frac{5}{4}$ または $x = 0$. 関数 g は, $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{5}{4}, \frac{\pi}{2}$ のうちの, どれかにおいて最大値をとり, どれかにおいて最小値をとる.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \quad , \quad f(0) = \quad , \quad f\left(\frac{5}{4}\right) = \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \quad .$$

問5.5.2 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right) \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の各実数について,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right) \cos x \right\} = \cos x - \cos x + \left(\frac{5}{4} - x\right)(-\sin x) \\ &= \left(x - \frac{5}{4}\right) \sin x . \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とする: $\left(x - \frac{5}{4}\right) \sin x = 0$ より $x - \frac{5}{4} = 0$ または $\sin x = 0$; $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので, $x = \frac{5}{4}$ または $x = 0$. 関数 g は, $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{5}{4}, \frac{\pi}{2}$ のうちの, どれかにおいて最大値をとり, どれかにおいて最小値をとる.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad f(0) = \frac{5}{4}, \quad f\left(\frac{5}{4}\right) = \sin \frac{5}{4}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 .$$

$0 < \frac{5}{4} < \frac{\pi}{2}$ で、区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$ は単調増加なので、
 $\sin 0 < \sin \frac{5}{4} < \sin \frac{\pi}{2}$, つまり $0 < \sin \frac{5}{4} < 1$. よって

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < f\left(\frac{5}{4}\right) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(0) .$$

関数 f は、 0 において最大値 $\frac{5}{4}$ をとり、 $-\frac{\pi}{2}$ において最小値 -1 をとる.

終

関数 f が実数 p において最大値をとることを示すためには、 f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \geq f(x)$ であることを示さなければならない。

関数 f が実数 p において最大値をとることを示すためには、 f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \geq f(x)$ であることを示さなければならない。関数 f が実数 p において最小値をとることを示すためには、 f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \leq f(x)$ であることを示さなければならない。

関数 f が実数 p において最大値をとることを示すためには、 f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \geq f(x)$ であることを示さなければならない。関数 f が実数 p において最小値をとることを示すためには、 f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \leq f(x)$ であることを示さなければならない。

例えば、定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f の最大値・最小値を調べるには、 $f(x)$ の値の極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を考える必要がある。

関数 f が実数 p において最大値をとることを示すためには、 f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \geq f(x)$ であることを示さなければならない。関数 f が実数 p において最小値をとることを示すためには、 f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \leq f(x)$ であることを示さなければならない。

例えば、定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f の最大値・最小値を調べるには、 $f(x)$ の値の極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を考える必要がある。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ のときは f の最大値はない。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ のときは f の最小値はない。

関数 f が実数 p において最大値をとることを示すためには、 f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \geq f(x)$ であることを示さなければならない。関数 f が実数 p において最小値をとることを示すためには、 f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \leq f(x)$ であることを示さなければならない。

例えば、定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f の最大値・最小値を調べるには、 $f(x)$ の値の極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を考える必要がある。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ のときは f の最大値はない。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ のときは f の最小値はない。 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ が収束するときは、 f の最大値・最小値はあったり無かったりする。

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1}$ ($x \geq 0$) と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1}$ ($x \geq 0$) と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べる.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1} = \frac{(8x - 2)(2x + 1) - (4x^2 - 2x + 7) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = \frac{8(x^2 + x - 2)}{(2x + 1)^2} \\ &= \frac{8(x - 1)(x + 2)}{(2x + 1)^2}. \end{aligned}$$

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1}$ ($x \geq 0$) と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べる.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1} = \frac{(8x - 2)(2x + 1) - (4x^2 - 2x + 7) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = \frac{8(x^2 + x - 2)}{(2x + 1)^2} \\ &= \frac{8(x - 1)(x + 2)}{(2x + 1)^2}. \end{aligned}$$

$x \geq 0$ のとき, $2x + 1 \geq 1$ なので $(2x + 1)^2 > 0$.

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1}$ ($x \geq 0$) と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べる.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1} = \frac{(8x - 2)(2x + 1) - (4x^2 - 2x + 7) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = \frac{8(x^2 + x - 2)}{(2x + 1)^2} \\ &= \frac{8(x - 1)(x + 2)}{(2x + 1)^2}. \end{aligned}$$

$x \geq 0$ のとき, $2x + 1 \geq 1$ なので $(2x + 1)^2 > 0$. $0 < x < 1$ のとき,
 $(x - 1)(x + 2) < 0$ なので $f'(x) = \frac{8(x - 1)(x + 2)}{(2x + 1)^2} < 0$. $x > 1$ のとき,
 $(x - 1)(x + 2) > 0$ なので $f'(x) = \frac{8(x - 1)(x + 2)}{(2x + 1)^2} > 0$.

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1}$ ($x \geq 0$) と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べる.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1} = \frac{(8x - 2)(2x + 1) - (4x^2 - 2x + 7) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = \frac{8(x^2 + x - 2)}{(2x + 1)^2} \\ &= \frac{8(x - 1)(x + 2)}{(2x + 1)^2}. \end{aligned}$$

$x \geq 0$ のとき, $2x + 1 \geq 1$ なので $(2x + 1)^2 > 0$. $0 < x < 1$ のとき, $(x - 1)(x + 2) < 0$ なので $f'(x) = \frac{8(x - 1)(x + 2)}{(2x + 1)^2} < 0$. $x > 1$ のとき,

$(x - 1)(x + 2) > 0$ なので $f'(x) = \frac{8(x - 1)(x + 2)}{(2x + 1)^2} > 0$. 関数 f は, 区間 $[0, 1]$

において単調減少であり, 区間 $[1, \infty)$ において単調増加である.

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1}$ ($x \geq 0$) と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べる.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1} = \frac{(8x - 2)(2x + 1) - (4x^2 - 2x + 7) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = \frac{8(x^2 + x - 2)}{(2x + 1)^2} \\ &= \frac{8(x - 1)(x + 2)}{(2x + 1)^2}. \end{aligned}$$

$x \geq 0$ のとき, $2x + 1 \geq 1$ なので $(2x + 1)^2 > 0$. $0 < x < 1$ のとき,

$(x - 1)(x + 2) < 0$ なので $f'(x) = \frac{8(x - 1)(x + 2)}{(2x + 1)^2} < 0$. $x > 1$ のとき,

$(x - 1)(x + 2) > 0$ なので $f'(x) = \frac{8(x - 1)(x + 2)}{(2x + 1)^2} > 0$. 関数 f は, 区間 $[0, 1]$

において単調減少であり, 区間 $[1, \infty)$ において単調増加である. $f(1) = 3$.
 f は 1 において最小値 3 をとる.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1}$$

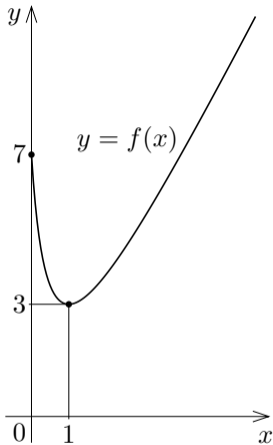
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\quad}{\quad}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(4 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2} \right)}{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \frac{4 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} \right) \\ &= \infty .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(4 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2} \right)}{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \frac{4 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} \right) \\
 &= \infty .
 \end{aligned}$$

関数 f は 1 において最小値 3 をとる.

f の最大値はない.



問5.5.3 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{12x - x^2}{2x + 1}$ と定める.

関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{12x - x^2}{2x + 1} =$$

$x \geq 0$ のとき $f'(x) > 0$. $0 < x < 3$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2} < 0$.

$x > 3$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2} < 0$. f は, 区間 $[0, 3]$ において単調増加であり, 区間 $[3, \infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x - x^2}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^2}{2x + 1} + \frac{12x}{2x + 1} \right) =$$

$f(3) = 3$. 関数 f は $[0, \infty)$ において最大値 3 をとる. f の最小値はない.

問5.5.3 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{12x - x^2}{2x + 1}$ と定める.

関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{12x - x^2}{2x + 1} = \frac{(12 - 2x)(2x + 1) - (12x - x^2) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = -\frac{2(x^2 + x - 6)}{(2x + 1)^2} \\ &= -\frac{2(x - 2)(x + 3)}{(2x + 1)^2}. \end{aligned}$$

$x \geq 0$ のとき $(2x + 1)^2 > 0$. $0 < x < 2$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x - 2)(x + 3)}{(2x + 1)^2} > 0$.

$x > 2$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x - 2)(x + 3)}{(2x + 1)^2} < 0$. f は, 区間 $[0, 2]$ において単調
であり, 区間 $[2, \infty)$ において単調 である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x - x^2}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^2}{2x + 1} + \frac{12x}{2x + 1} \right) =$$

$f(2) = \frac{12 \cdot 2 - 2^2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{20}{5} = 4$. 関数 f は $[0, \infty)$ において最 値 4 をとる. f の最 値はない.

問5.5.3 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{12x - x^2}{2x + 1}$ と定める.

関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{12x - x^2}{2x + 1} = \frac{(12 - 2x)(2x + 1) - (12x - x^2) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = -\frac{2(x^2 + x - 6)}{(2x + 1)^2} \\ &= -\frac{2(x - 2)(x + 3)}{(2x + 1)^2}. \end{aligned}$$

$x \geq 0$ のとき $(2x + 1)^2 > 0$. $0 < x < 2$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x - 2)(x + 3)}{(2x + 1)^2} > 0$.

$x > 2$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x - 2)(x + 3)}{(2x + 1)^2} < 0$. f は, 区間 $[0, 2]$ において単調増加であり, 区間 $[2, \infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x - x^2}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cdot}{\cdot} \right) =$$

$f(\cdot) = \cdot$. 関数 f は \cdot において最 値 \cdot をとる. f の最 値はない.

問5.5.3 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{12x - x^2}{2x + 1}$ と定める.

関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{12x - x^2}{2x + 1} = \frac{(12 - 2x)(2x + 1) - (12x - x^2) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = -\frac{2(x^2 + x - 6)}{(2x + 1)^2} \\ &= -\frac{2(x - 2)(x + 3)}{(2x + 1)^2} \end{aligned}$$

$x \geq 0$ のとき $(2x + 1)^2 > 0$. $0 < x < 2$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x - 2)(x + 3)}{(2x + 1)^2} > 0$.

$x > 2$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x - 2)(x + 3)}{(2x + 1)^2} < 0$. f は, 区間 $[0, 2]$ において単調増加であり, 区間 $[2, \infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x - x^2}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \frac{\frac{12}{x} - 1}{2 + \frac{1}{x}} \right) = -\infty.$$

$f(\) =$. 関数 f は において最 値 をとる. f の最 値はない.

問5.5.3 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{12x - x^2}{2x + 1}$ と定める.

関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{12x - x^2}{2x + 1} = \frac{(12 - 2x)(2x + 1) - (12x - x^2) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = -\frac{2(x^2 + x - 6)}{(2x + 1)^2} \\ &= -\frac{2(x - 2)(x + 3)}{(2x + 1)^2} \end{aligned}$$

$x \geq 0$ のとき $(2x + 1)^2 > 0$. $0 < x < 2$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x - 2)(x + 3)}{(2x + 1)^2} > 0$.

$x > 2$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x - 2)(x + 3)}{(2x + 1)^2} < 0$. f は, 区間 $[0, 2]$ において単調増加であり, 区間 $[2, \infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x - x^2}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \frac{\frac{12}{x} - 1}{2 + \frac{1}{x}} \right) = -\infty.$$

$f(2) = 4$. 関数 f は 2 において最大値 4 をとる. f の最小値はない.

終

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{4x-3}{x^2+1} \right) = \frac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} .$$

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{4x-3}{x^2+1} \right) = \frac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0 < x < 2$ のとき, $(x-2)(2x+1) < 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} < 0$.

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{4x-3}{x^2+1} \right) = \frac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0 < x < 2$ のとき, $(x-2)(2x+1) < 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} < 0$.

$x > 2$ のとき, $(x-2)(2x+1) > 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} > 0$.

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{4x-3}{x^2+1} \right) = \frac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0 < x < 2$ のとき, $(x-2)(2x+1) < 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} < 0$.

$x > 2$ のとき, $(x-2)(2x+1) > 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} > 0$. f

は, 区間 $[0, 2]$ において単調減少であり, 区間 $[2, \infty)$ において単調増加である.

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{4x-3}{x^2+1} \right) = \frac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0 < x < 2$ のとき, $(x-2)(2x+1) < 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} < 0$.

$x > 2$ のとき, $(x-2)(2x+1) > 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} > 0$. f

は, 区間 $[0, 2]$ において単調減少であり, 区間 $[2, \infty)$ において単調増加である. $f(2) = 1$. f は 2 において最小値 1 をとる.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{4x-3}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{\quad}{\quad} \right\}$$

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{4x-3}{x^2+1} \right) = \frac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0 < x < 2$ のとき, $(x-2)(2x+1) < 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} < 0$.

$x > 2$ のとき, $(x-2)(2x+1) > 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} > 0$. f

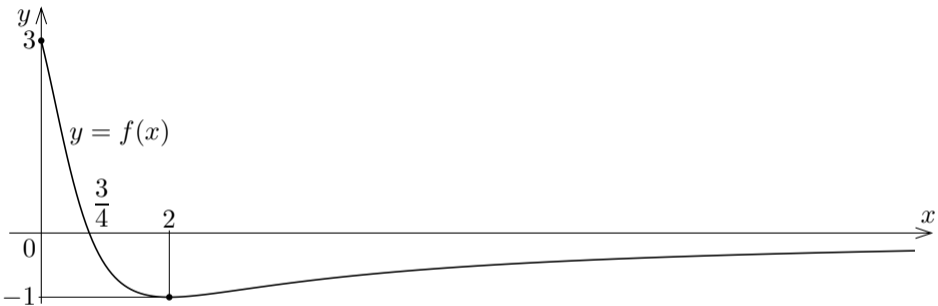
は, 区間 $[0, 2]$ において単調減少であり, 区間 $[2, \infty)$ において単調増加である. $f(2) = 1$. f は 2 において最小値 1 をとる.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{4x-3}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{x \left(4 - \frac{3}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \frac{4 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

$f(0) = 3$. $x > \frac{3}{4}$ のとき $3x - 4 > 0$ なので $f(x) = -\frac{4x - 3}{x^2 + 1} < 0$. f は 0
において最大値 3 をとる.



$f(0) = 3$. $x > \frac{3}{4}$ のとき $3x - 4 > 0$ なので $f(x) = -\frac{4x - 3}{x^2 + 1} < 0$. f は 0
において最大値 3 をとる.



関数 f は、0 において最大値 3 をとり、2 において最小値 -1 をとる。 終

問5.5.4 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+3}$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{4x-1}{x^2+3} =$$

$0 < x < \quad$ のとき $f'(x) = \quad$ $0 \cdot x > \quad$ のとき

$f'(x) = \quad$ $0 \cdot f$ は, 区間 $[0, \quad]$ において単調 \quad であり,

区間 $[\quad, \infty)$ において単調 \quad である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\quad \right)}{\left(\quad \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\quad \cdot \frac{\quad}{\quad} \right) =$$

$f(\quad) = \quad \cdot f(\quad) = \quad \cdot x > \quad$ のとき $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+3} > 0 \cdot$

問5.5.4 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+3}$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{4x-1}{x^2+3} = -\frac{2(2x^2-x-6)}{(x^2+3)^2} = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}.$$

$0 < x < 2$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} > 0$. $x > 2$ のとき

$f'(x) = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} < 0$. f は, 区間 $[0, 2]$ において単調増加であり,

区間 $[2, \infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} \right) =$$

$f(0) = -\frac{1}{3}$. $f(2) = \frac{7}{13}$. $x > 2$ のとき $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+3} > 0$.

問5.5.4 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+3}$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{4x-1}{x^2+3} = -\frac{2(2x^2-x-6)}{(x^2+3)^2} = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}.$$

$0 < x < 2$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} > 0$. $x > 2$ のとき

$f'(x) = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} < 0$. f は, 区間 $[0, 2]$ において単調増加であり,

区間 $[2, \infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\quad \right)}{\left(\quad \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\quad \cdot \frac{\quad}{\quad} \right) =$$

$f(2) = \quad$. $f(0) = \quad$. $x > \quad$ のとき $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+3} > 0$.

問5.5.4 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+3}$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{4x-1}{x^2+3} = -\frac{2(2x^2-x-6)}{(x^2+3)^2} = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}.$$

$0 < x < 2$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} > 0$. $x > 2$ のとき

$f'(x) = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} < 0$. f は, 区間 $[0, 2]$ において単調増加であり,

区間 $[2, \infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x^2}} \right) = 0.$$

$f(2) = \quad$. $f(0) = \quad$. $x > \quad$ のとき $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+3} > 0$.

問5.5.4 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+3}$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{4x-1}{x^2+3} = -\frac{2(2x^2-x-6)}{(x^2+3)^2} = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}.$$

$0 < x < 2$ のとき $f'(x) = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} > 0$. $x > 2$ のとき

$f'(x) = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} < 0$. f は, 区間 $[0, 2]$ において単調増加であり,

区間 $[2, \infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x^2}} \right) = 0.$$

$f(2) = 1$. $f(0) = -\frac{1}{3}$. $x > \frac{1}{4}$ のとき $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+3} > 0$.

関数 f は、 2 において最大値 1 をとり、 0 において最小値 $-\frac{1}{3}$ をとる。□終

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{4x+3}{x^2+1} \right) = \frac{4x^2+6x-4}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} .$$

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{4x+3}{x^2+1} \right) = \frac{4x^2+6x-4}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0 < x < \frac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1) < 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} < 0$.

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{4x+3}{x^2+1} \right) = \frac{4x^2+6x-4}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0 < x < \frac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1) < 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} < 0$.

$x > \frac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1) > 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} > 0$.

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{4x+3}{x^2+1} \right) = \frac{4x^2+6x-4}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0 < x < \frac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1) < 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} < 0$.

$x > \frac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1) > 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} > 0$. f

は, 区間 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ において単調減少であり, 区間 $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ において単調増加である.

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{4x+3}{x^2+1} \right) = \frac{4x^2+6x-4}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0 < x < \frac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1) < 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} < 0$.

$x > \frac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1) > 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} > 0$. f

は, 区間 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ において単調減少であり, 区間 $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ において単調増加である. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -4$. f は $\frac{1}{2}$ において最小値 -4 をとる.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{4x+3}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\quad}{\quad} \right\}$$

例 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\frac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{4x+3}{x^2+1} \right) = \frac{4x^2+6x-4}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}.$$

$0 < x < \frac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1) < 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} < 0$.

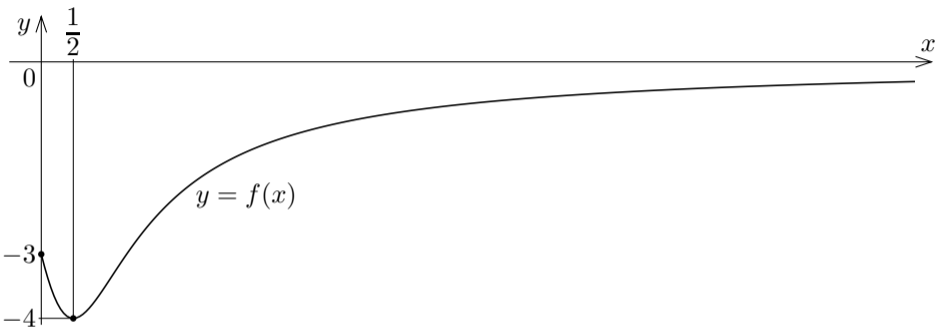
$x > \frac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1) > 0$ なので $f'(x) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} > 0$. f

は, 区間 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ において単調減少であり, 区間 $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ において単調増加で

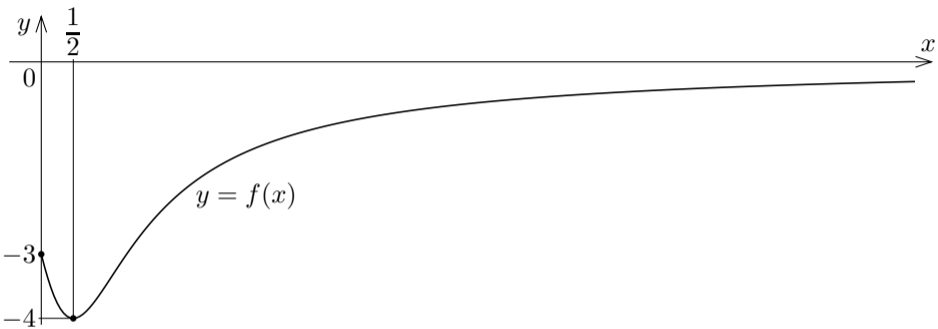
ある. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -4$. f は $\frac{1}{2}$ において最小値 -4 をとる.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{4x+3}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{x\left(4 + \frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \frac{4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$f(0) = -3$ なので $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 > f(0)$. f の最大値はない.



$f(0) = -3$ なので $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 > f(0)$. f の最大値はない.



関数 f は $\frac{1}{2}$ において最小値 -4 をとる. f の最大値はない.

終

問5.5.5 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{3x+1}{3x^2+1}$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{3x+1}{3x^2+1} =$$

$0 < x < \quad$ のとき $f'(x) = \quad$ $0 \cdot x > \quad$ のとき

$f'(x) = \quad$ $0 \cdot f$ は、区間 $[0, \quad]$ において単調 \quad であり、

区間 $[\quad, \infty)$ において単調 \quad である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\quad \right)}{\left(\quad \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\quad \cdot \frac{\quad}{\quad} \right) = \quad .$$

$$f\left(\quad \right) = \quad . \quad f(0) = \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) .$$

問5.5.5 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{3x+1}{3x^2+1}$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{3x+1}{3x^2+1} = -\frac{3(3x^2+2x-1)}{(3x^2+1)^2} = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}.$$

$0 < x < 1$ のとき $f'(x) = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} > 0$. $x > 1$ のとき

$f'(x) = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} < 0$. f は, 区間 $[0, 1]$ において単調増加であり,

区間 $[1, \infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0.$$

$$f(0) = \frac{1}{1} = 1. \quad f(1) = \frac{4}{4} = 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

問5.5.5 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{3x+1}{3x^2+1}$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{3x+1}{3x^2+1} = -\frac{3(3x^2+2x-1)}{(3x^2+1)^2} = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}.$$

$0 < x < \frac{1}{3}$ のとき $f'(x) = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} > 0$. $x > \frac{1}{3}$ のとき

$f'(x) = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} < 0$. f は, 区間 $[0, \frac{1}{3}]$ において単調増加であり,

区間 $[\frac{1}{3}, \infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\quad)}{(\quad)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cdot \frac{\quad}{\quad} \right) = \quad.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \quad. \quad f(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

問5.5.5 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{3x+1}{3x^2+1}$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{3x+1}{3x^2+1} = -\frac{3(3x^2+2x-1)}{(3x^2+1)^2} = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}.$$

$0 < x < \frac{1}{3}$ のとき $f'(x) = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} > 0$. $x > \frac{1}{3}$ のとき

$f'(x) = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} < 0$. f は, 区間 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ において単調増加であり,

区間 $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$ において単調減少である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{3 + \frac{1}{x}}{3 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \quad . \quad f(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

問5.5.5 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{3x+1}{3x^2+1}$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{3x+1}{3x^2+1} = -\frac{3(3x^2+2x-1)}{(3x^2+1)^2} = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}.$$

$0 < x < \frac{1}{3}$ のとき $f'(x) = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} > 0$. $x > \frac{1}{3}$ のとき

$f'(x) = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} < 0$. f は, 区間 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ において単調増加であり,

区間 $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$ において単調減少である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{3 + \frac{1}{x}}{3 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}. \quad f(0) = 1 > \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

関数 f は $\frac{1}{3}$ において最大値 $\frac{3}{2}$ をとる. f の最小値はない.

終