

5.3 関数の値の増減

[定義] 関数 f の定義域が区間 I を含むとする. I において f が単調増加であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) < f(v)$.

I において f が単調減少であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) > f(v)$.

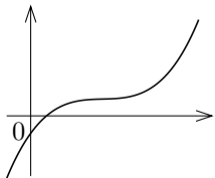
[定義] 関数 f の定義域が区間 I を含むとする. I において f が単調増加であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) < f(v)$.

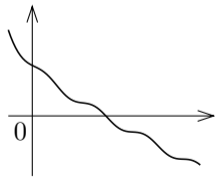
I において f が単調減少であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) > f(v)$.

感覚的にいうと, 関数 f が単調増加である範囲では f のグラフは右上がりになり, f が単調減少である範囲では f のグラフは右下がりになる.

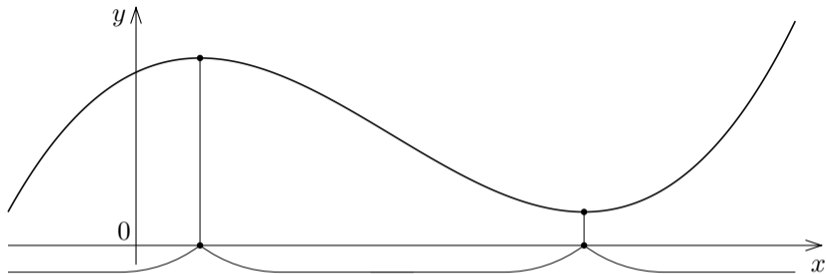


単調増加である関数のグラフの例



単調減少である関数のグラフの例

関数のグラフでは例えば次のようになる。

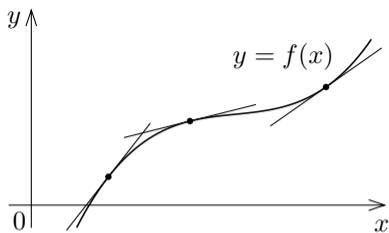


この区間で単調増加

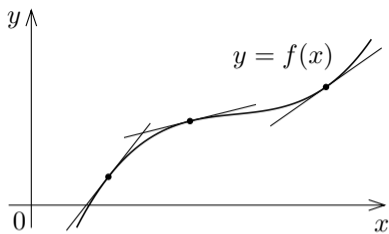
この区間で単調減少

この区間で単調増加

微分可能な関数 f について、 $f'(x) > 0$ のとき、 f のグラフの接線は、傾きが正なので、右上がりの直線である；



微分可能な関数 f について、 $f'(x) > 0$ のとき、 f のグラフの接線は、傾きが正なので、右上がりの直線である；このとき、右図のように、関数 f のグラフも右上がりになる、つまり f は単調増加であるように思える。



区間 I で関数 f が微分可能であり, I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする.

区間 I で関数 f が微分可能であり, I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする.

区間 I の実数 u, v について $u < v$ とする.

区間 I で関数 f が微分可能であり、 I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする。

区間 I の実数 u, v について $u < v$ とする。 f は区間 $[u, v]$ で微分可能なので、平均値の定理により、次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) \quad \text{かつ} \quad u < w < v .$$

[平均値の定理] 実数 a と b について $a < b$ で、関数 f が区間 $[a, b]$ において微分可能であるならば、次のような実数 c がある：

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad \text{かつ} \quad a < c < b .$$

区間 I で関数 f が微分可能であり、 I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする。

区間 I の実数 u, v について $u < v$ とする。 f は区間 $[u, v]$ で微分可能なので、平均値の定理により、次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) \quad \text{かつ} \quad u < w < v .$$

u, v は区間 I に属しかつ $u < w < v$ なので、 w は区間 I に属す；よって $f'(w) > 0$.

区間 I で関数 f が微分可能であり、 I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする。

区間 I の実数 u, v について $u < v$ とする。 f は区間 $[u, v]$ で微分可能なので、平均値の定理により、次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) \quad \text{かつ} \quad u < w < v .$$

u, v は区間 I に属しかつ $u < w < v$ なので、 w は区間 I に属す；よって $f'(w) > 0$. 更に $u < v$ より $v - u > 0$ なので、

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) > 0 ,$$

区間 I で関数 f が微分可能であり、 I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする。

区間 I の実数 u, v について $u < v$ とする。 f は区間 $[u, v]$ で微分可能なので、平均値の定理により、次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) \quad \text{かつ} \quad u < w < v .$$

u, v は区間 I に属しかつ $u < w < v$ なので、 w は区間 I に属す；よって $f'(w) > 0$. 更に $u < v$ より $v - u > 0$ なので、

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) > 0 ,$$

従って $f(u) < f(v)$.

区間 I で関数 f が微分可能であり、 I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする。

区間 I の実数 u, v について $u < v$ とする。 f は区間 $[u, v]$ で微分可能なので、平均値の定理により、次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) \quad \text{かつ} \quad u < w < v .$$

u, v は区間 I に属しかつ $u < w < v$ なので、 w は区間 I に属す；よって $f'(w) > 0$. 更に $u < v$ より $v - u > 0$ なので、

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) > 0 ,$$

従って $f(u) < f(v)$.

$u < v$ ならば $f(u) < f(v)$ なので、 I において f は単調増加である。

区間 I で関数 f が微分可能であり、 I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする。

区間 I の実数 u, v について $u < v$ とする。 f は区間 $[u, v]$ で微分可能なので、平均値の定理により、次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) \quad \text{かつ} \quad u < w < v .$$

u, v は区間 I に属しかつ $u < w < v$ なので、 w は区間 I に属す；よって $f'(w) > 0$. 更に $u < v$ より $v - u > 0$ なので、

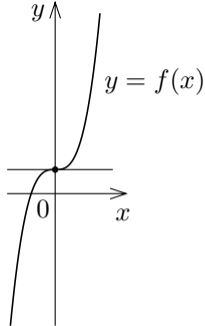
$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) > 0 ,$$

従って $f(u) < f(v)$.

$u < v$ ならば $f(u) < f(v)$ なので、 I において f は単調増加である。

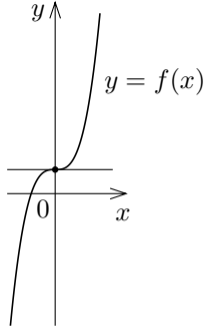
このように、 I の各実数 x について $f'(x) > 0$ ならば、 I において f は単調増加である。

例として実数全体を定義域とする関数 $f(x) = x^3 + 1$ を考える. $f'(x) = 3x^2$ であるから $f'(0) = 0$ であるが, 右のグラフから分かるように, f は実数全体で単調増加である.



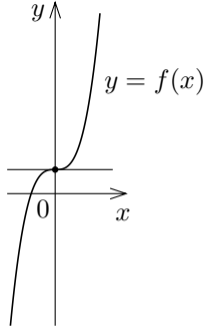
例として実数全体を定義域とする関数 $f(x) = x^3 + 1$ を考える. $f'(x) = 3x^2$ であるから $f'(0) = 0$ であるが, 右のグラフから分かるように, f は実数全体で単調増加である.

このように, 区間 I で微分可能な関数 f について, I の中に一つや二つ $f'(p) = 0$ である実数 p があっても, それ以外の各実数 x で $f'(x) > 0$ ならば, f は I において単調増加である.



例として実数全体を定義域とする関数 $f(x) = x^3 + 1$ を考える. $f'(x) = 3x^2$ であるから $f'(0) = 0$ であるが, 右のグラフから分かるように, f は実数全体で単調増加である.

このように, 区間 I で微分可能な関数 f について, I の中に一つや二つ $f'(p) = 0$ である実数 p があっても, それ以外の各実数 x で $f'(x) > 0$ ならば, f は I において単調増加である.



[定理 5.3.1] 区間 I で関数 f が微分可能であるとする.

- (1) I の有限個の実数を除く各実数 x について $f'(x) > 0$ ならば, I において f は単調増加である.
- (2) I の有限個の実数を除く各実数 x について $f'(x) < 0$ ならば, I において f は単調減少である.

実数 p において微分可能な関数 f について、前の頁の例のように、 $f'(p) = 0$ であっても f が p において極値をとらないこともある。

実数 p において微分可能な関数 f について、前の頁の例のように、 $f'(p) = 0$ であっても f が p において極値をとらないこともある。なので、

$$f \text{ が } p \text{ において極値をとるならば } f'(p) = 0$$

であるが、

$f'(p) = 0$ だからといって f が p において極値をとるとは限らない。

区間 I において関微分可能な関数 f について、 I において f が単調増加であることをいうためには、 I の有限個の実数を除く各実数 x について $f'(x) > 0$ であることを示さなければならない： $f'(x) \geq 0$ であっても f は単調増加であるとは限らない。

区間 I において関微分可能な関数 f について、 I において f が単調増加であることをいうためには、 I の有限個の実数を除く各実数 x について $f'(x) > 0$ であることを示さなければならない： $f'(x) \geq 0$ であっても f は単調増加であるとは限らない。

例 実数全体を定義域とする定数関数 $f(x) = 3$ について、 $f'(x) = 0$ なので $f'(x) \geq 0$; しかし定数関数 f は単調増加ではない。 **終**

例 実数全体を定義域とする関数 f を

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6 \text{ と定める. 関数 } f \text{ の}$$

値の増減を調べる.

例 実数全体を定義域とする関数 f を

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ と定める. 関数 f の

値の増減を調べる.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6 \right) = x^2 - 6x + 9 \\ &= (x - 3)^2 . \end{aligned}$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ と定める. 関数 f の

値の増減を調べる.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6 \right) = x^2 - 6x + 9 \\ &= (x - 3)^2 . \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると, $(x - 3)^2 = 0$ なので

$x = 3$.

例 実数全体を定義域とする関数 f を

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ と定める. 関数 f の

値の増減を調べる.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6 \right) = x^2 - 6x + 9 \\ &= (x - 3)^2 . \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると, $(x - 3)^2 = 0$ なので

$x = 3$. $x \neq 3$ のとき, $x - 3 \neq 0$ なので

$$f'(x) = (x - 3)^2 > 0 .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ と定める. 関数 f の

値の増減を調べる.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6 \right) = x^2 - 6x + 9 \\ &= (x-3)^2 . \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると, $(x-3)^2 = 0$ なので

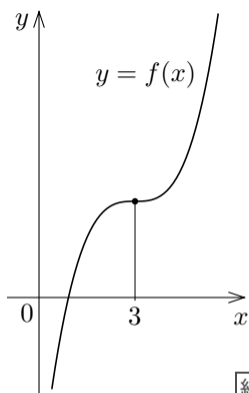
$x = 3$. $x \neq 3$ のとき, $x-3 \neq 0$ なので

$f'(x) = (x-3)^2 > 0$. 従って関数 f は実数全体において単調増加である.

例 実数全体を定義域とする関数 f を
 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ と定める. 関数 f の
値の増減を調べる.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6 \right) = x^2 - 6x + 9 \\ &= (x-3)^2. \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると, $(x-3)^2 = 0$ なので
 $x = 3$. $x \neq 3$ のとき, $x-3 \neq 0$ なので
 $f'(x) = (x-3)^2 > 0$. 従って関数 f は実数全体
において単調増加である.



終

問5.3.1 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5$ と定める．関数 g の値の増減を調べよ．

$g'(x) = \quad = (\quad)^2$. $g'(x) = 0$ とすると, $(\quad)^2 = 0$ なので $x = \quad$. $x \neq \quad$ のとき, $\neq 0$ なので $g'(x) = (\quad)^2$. 故に関数 g は \quad において \quad である.

問5.3.1 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5$ と定める．関数 g の値の増減を調べよ．

$g'(x) = 9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$ ． $g'(x) = 0$ とすると， $(3x - 2)^2 = 0$ なので $x = \frac{2}{3}$ ． $x \neq \frac{2}{3}$ のとき， $g'(x) \neq 0$ なので $g'(x) = (\quad)^2$ ． 故に関数 g は $x = \frac{2}{3}$ において \quad である．

問5.3.1 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5$ と定める．関数 g の値の増減を調べよ．

$g'(x) = 9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$ ． $g'(x) = 0$ とすると、 $(3x - 2)^2 = 0$ なので $x = \frac{2}{3}$ ． $x \neq \frac{2}{3}$ のとき、 $3x - 2 \neq 0$ なので $g'(x) = (3x - 2)^2 > 0$ ． 故に関数 g は実数全体において単調増加である． □終

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$ と定める. 関数 φ の値の増減を調べる.

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$ と定める. 関数 φ の値の増減を調べる. 3次関数 $\varphi(x)$ の導関数 $\varphi'(x)$ は2次関数である. 2次方程式 $\varphi'(x) = 0$ の解が実数でないとき, $\varphi'(x)$ の値を表す2次式を平方完成する.

係数が実数である2次方程式について, 解が実数でない条件は判別式の値が負であることである.

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$ と定める. 関数 φ の値の増減を調べる. 3次関数 $\varphi(x)$ の導関数 $\varphi'(x)$ は2次関数である. 2次方程式 $\varphi'(x) = 0$ の解が実数でないとき, $\varphi'(x)$ の値を表す2次式を平方完成する.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 6x) = 3x^2 - 8x + 6 \\ &= 3\left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) + 6 = 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right\} + 6 \\ &= 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} - \frac{16}{3} + 6 \\ &= 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} .\end{aligned}$$

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$ と定める. 関数 φ の値の増減を調べる. 3次関数 $\varphi(x)$ の導関数 $\varphi'(x)$ は2次関数である. 2次方程式 $\varphi'(x) = 0$ の解が実数でないとき, $\varphi'(x)$ の値を表す2次式を平方完成する.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 6x) = 3x^2 - 8x + 6 \\ &= 3\left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) + 6 = 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right\} + 6 \\ &= 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} - \frac{16}{3} + 6 \\ &= 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

任意の実数 x について, $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 \geq 0$ なので

$$\varphi'(x) = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0.$$

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$ と定める. 関数 φ の値の増減を調べる. 3次関数 $\varphi(x)$ の導関数 $\varphi'(x)$ は2次関数である. 2次方程式 $\varphi'(x) = 0$ の解が実数でないとき, $\varphi'(x)$ の値を表す2次式を平方完成する.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 6x) = 3x^2 - 8x + 6 \\ &= 3\left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) + 6 = 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right\} + 6 \\ &= 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} - \frac{16}{3} + 6 \\ &= 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

任意の実数 x について, $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 \geq 0$ なので

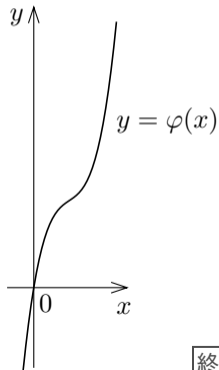
$\varphi'(x) = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0$. 故に φ は実数全体において単調増加である.

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$ と定める. 関数 φ の値の増減を調べる. 3次関数 $\varphi(x)$ の導関数 $\varphi'(x)$ は2次関数である. 2次方程式 $\varphi'(x) = 0$ の解が実数でないとき, $\varphi'(x)$ の値を表す2次式を平方完成する.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 6x) = 3x^2 - 8x + 6 \\ &= 3\left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) + 6 = 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right\} + 6 \\ &= 3\left\{x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} - \frac{16}{3} + 6 \\ &= 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

任意の実数 x について, $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 \geq 0$ なので

$\varphi'(x) = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0$. 故に φ は実数全体において単調増加である.



問5.3.2 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ と定める. 関数 ψ の値の増減を調べよ.

$$\psi'(x) = \quad = \left\{ \quad \right\} + \quad = \left(\quad \right)^2 .$$

任意の実数 x について, $\left(x \quad \right)^2 \geq 0$ なので, $-3\left(x \quad \right)^2 \leq 0$, よって

$$\psi'(x) = \left(\quad \right)^2 \leq \quad .$$

故に ψ は \quad において \quad である.

問5.3.2 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ と定める．関数 ψ の値の増減を調べよ．

$$\psi'(x) = -3x^2 + 4x - 2 = -3\left\{x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} + \frac{4}{3} - 2 = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} .$$

任意の実数 x について、 $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \geq 0$ なので、 $-3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \leq 0$ 、よって

$$\psi'(x) = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} \leq -\frac{2}{3} < 0 .$$

故に ψ は実数全体において単調減少である．

終

[定義] 関数 f の定義域が区間 I を含むとする. f が I において広義の単調増加であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) \leq f(v)$.

f が I において広義の単調減少であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) \geq f(v)$.

[定義] 関数 f の定義域が区間 I を含むとする. f が I において広義の単調増加であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) \leq f(v)$.

f が I において広義の単調減少であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) \geq f(v)$.

関数 f が単調増加であるとは, x の値が大きくなるとき常に $f(x)$ の値も大きくなることである. 関数 f が広義の単調増加であるとは, x の値が大きくなるとき常に $f(x)$ の値は小さくならないことである.

[定義] 関数 f の定義域が区間 I を含むとする. f が I において広義の単調増加であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) \leq f(v)$.

f が I において広義の単調減少であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) \geq f(v)$.

関数 f が単調増加であるとは, x の値が大きくなるとき常に $f(x)$ の値も大きくなることである. 関数 f が広義の単調増加であるとは, x の値が大きくなるとき常に $f(x)$ の値は小さくならないことである. 単調増加より広義の単調増加の方が条件が緩い. 例えば定数関数は広義の単調増加であるが単調増加ではない.

[定義] 関数 f の定義域が区間 I を含むとする. f が I において広義の単調増加であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) \leq f(v)$.

f が I において広義の単調減少であるとは次のことである:

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) \geq f(v)$.

関数 f が単調増加であるとは, x の値が大きくなるとき常に $f(x)$ の値も大きくなることである. 関数 f が広義の単調増加であるとは, x の値が大きくなるとき常に $f(x)$ の値は小さくならないことである. 単調増加より広義の単調増加の方が条件が緩い. 例えば定数関数は広義の単調増加であるが単調増加ではない.

同様に単調減少より広義の単調減少の方が条件が緩い.

証明は省くが次の定理が成り立つ.

[定理 5.3.2] 区間 I で関数 f が微分可能であるとする.

I において f が広義の単調増加 $\iff I$ の各実数 x について $f'(x) \geq 0$.

I において f が広義の単調減少 $\iff I$ の各実数 x について $f'(x) \leq 0$.

証明は省くが次の定理が成り立つ.

[定理 5.3.2] 区間 I で関数 f が微分可能であるとする.

I において f が広義の単調増加 $\iff I$ の各実数 x について $f'(x) \geq 0$.

I において f が広義の単調減少 $\iff I$ の各実数 x について $f'(x) \leq 0$.

関数 f は区間 I において微分可能であるとする.

証明は省くが次の定理が成り立つ.

[定理 5.3.2] 区間 I で関数 f が微分可能であるとする.

I において f が広義の単調増加 $\iff I$ の各実数 x について $f'(x) \geq 0$.

I において f が広義の単調減少 $\iff I$ の各実数 x について $f'(x) \leq 0$.

関数 f は区間 I において微分可能であるとする. I において $f'(x) \geq 0$ であるとき, f は I において必ずしも単調増加であるとは限らないが, f は I において広義の単調増加ではある.

証明は省くが次の定理が成り立つ.

[定理 5.3.2] 区間 I で関数 f が微分可能であるとする.

I において f が広義の単調増加 $\iff I$ の各実数 x について $f'(x) \geq 0$.

I において f が広義の単調減少 $\iff I$ の各実数 x について $f'(x) \leq 0$.

関数 f は区間 I において微分可能であるとする. I において $f'(x) \geq 0$ であるとき, f は I において必ずしも単調増加であるとは限らないが, f は I において広義の単調増加ではある. I において $f'(x) \leq 0$ であるとき, f は I において必ずしも単調減少であるとは限らないが, f は I において広義の単調減少ではある.