

4. 拡充

自然対数の底

2.9節において、自然対数の底といわれる定数 e を次のように定義した：

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} .$$

そしてこの定数 e を自然対数の底といった。しかし、通常、自然対数の底 e は別のやり方で定義される。

定理の証明は省く.

[定理] 数列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$ は収束する.

この数列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$ の極限值を自然対数の底といい, e と表記する:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

[定理]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e .$$

[定理]

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e .$$

この定理が 2.9 節において $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ と定めたことの根拠である.