

## 4.8 級数

無限数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  の項  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  を順に  $+$  でつないだ  
形の式

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

を（無限）級数という；

無限数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  の項  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  を順に  $+$  でつないだ  
形の式

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

を（無限）級数という；正確には次のように書き表す：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

無限数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  の項  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  を順に  $+$  でつないだ形の式

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

を（無限）級数という；正確には次のように書き表す：

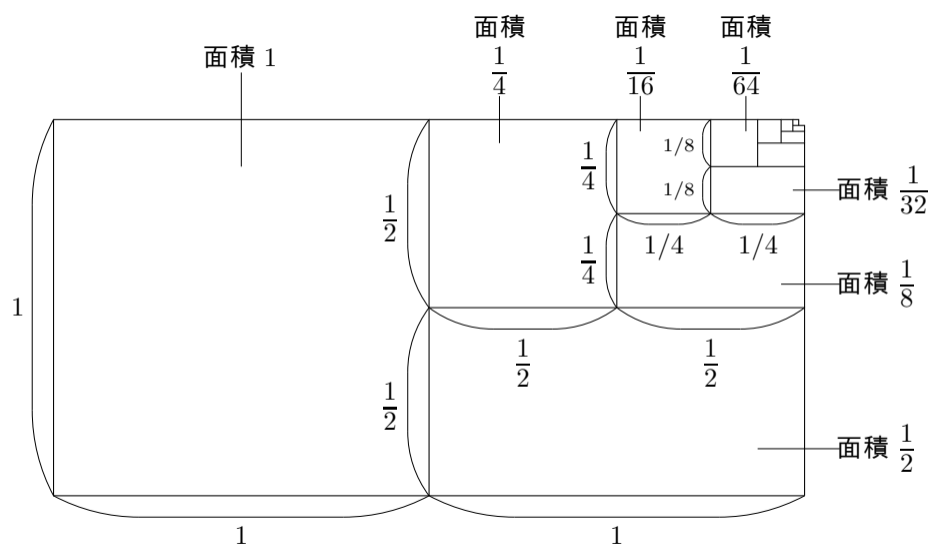
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

この（無限）級数では、無限個の項  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  の値を合計することを表したい。しかし、無限個の値を合計することは実際にはできない。

例 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  つまり

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

を考える．次のように，面積が  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$  の正方形または長方形をくっつけていく．



このように正方形または長方形をくっつけてできる図形の面積は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

である。このように無限個の値を合計することはできない。

このように正方形または長方形をくっつけてできる図形の面積は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

である。このように無限個の値を合計することはできない。しかし、このような正方形または長方形を限りなくくっつけていくと、面積が 2 の長方形に限りなく近づいていく。

このように正方形または長方形をくっつけてできる図形の面積は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

である．このように無限個の値を合計することはできない．しかし，このような正方形または長方形を限りなくくっつけていくと，面積が 2 の長方形に限りなく近づいていく．このことから次のように思える：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 2 .$$

次のように考える.

次のように考える.  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n}$  とおくと,

次のように考える．  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n}$  とおくと，

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} ,$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} ,$$

次のように考える．  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n}$  とおくと，

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} ,$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} ,$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと  $S = 2 - \frac{1}{2^n}$  なので，

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} .$$

次のように考える．  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n}$  とおくと，

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} ,$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} ,$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと  $S = 2 - \frac{1}{2^n}$  なので，

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} .$$

$n \rightarrow \infty$  のときの極限を考える：

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{2^n} \right) \\ &= 2 . \end{aligned}$$

一般的に、自然数  $m$  及び無限数列  $\{a_n\}_{n \geq m}$  に対して（無限）級数  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  の値を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\sum_{n=m}^{\infty} a_n &= a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + a_{m+4} + a_{m+5} + \cdots + a_n + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + a_{m+4} + a_{m+5} + \cdots + a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k .\end{aligned}$$

一般的に、自然数  $m$  及び無限数列  $\{a_n\}_{n \geq m}$  に対して（無限）級数  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  の値を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\sum_{n=m}^{\infty} a_n &= a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + a_{m+4} + a_{m+5} + \cdots + a_n + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + a_{m+4} + a_{m+5} + \cdots + a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k .\end{aligned}$$

つまり、級数  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  の値は数列  $\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$  の極限值である。この極限值を級数の和という。

[定義] 自然数  $m$  に対する値から始まる無限数列  $\{a_n\}_{n \geq m}$  に対して、数列  $\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$  が収束するとき、級数  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  は収束するといひ、数列

$\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$  を級数  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  の値とする：

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k .$$

この極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$  を級数の和といふ。

[定義] 自然数  $m$  に対する値から始まる無限数列  $\{a_n\}_{n \geq m}$  に対して、数列  $\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$  が収束するとき、級数  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  は収束するといひ、数列

$\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$  を級数  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  の値とする：

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k .$$

この極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$  を級数の和という。また、数列  $\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$  が発散するとき、級数  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  は発散するという。

つまり、例えば数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  に対して、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$  があるときに限

り級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  の値があつて、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k .$$

極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$  がないときは級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  の値もない。

例 級数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right)$  の和を調べる.

例 級数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right)$  の和を調べる. 級数の和の定義より

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left( \frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right).$$

例 級数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right)$  の和を調べる. 級数の和の定義より

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left( \frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right).$$

まず総和  $\sum_{k=2}^n \left( \frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right)$  を計算する.

例 級数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right)$  の和を調べる. 級数の和の定義より

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left( \frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right).$$

まず総和  $\sum_{k=2}^n \left( \frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right)$  を計算する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left( \frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right) &= \frac{5}{2} - \frac{5}{3} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - \frac{5}{5} + \cdots + \frac{5}{n-1} - \frac{5}{n} + \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{5}{n+1}. \end{aligned}$$

例 級数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right)$  の和を調べる. 級数の和の定義より

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left( \frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right).$$

まず総和  $\sum_{k=2}^n \left( \frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right)$  を計算する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left( \frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right) &= \frac{5}{2} - \frac{5}{3} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - \frac{5}{5} + \cdots + \frac{5}{n-1} - \frac{5}{n} + \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{5}{n+1}. \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0$  なので,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left( \frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{2} - \frac{5}{n+1} \right) = \frac{5}{2}. \quad \boxed{\text{終}}$$

問4.8.1 級数  $\sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \right)$  の和を調べよ.

$$\sum_{k=3}^n \left( \frac{6}{k} - \frac{6}{k+1} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n+1} = \quad \text{なので,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n \left( \quad \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \quad \right) \\ &= \end{aligned}$$

問4.8.1 級数  $\sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \right)$  の和を調べよ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \left( \frac{6}{k} - \frac{6}{k+1} \right) &= \frac{6}{3} - \frac{6}{4} + \frac{6}{4} - \frac{6}{5} + \cdots + \frac{6}{n-1} - \frac{6}{n} + \frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \\ &= 2 - \frac{6}{n+1}. \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n+1} = 0$  なので,

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n \left( \frac{6}{k} - \frac{6}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{6}{n+1} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

問4.8.1 級数  $\sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \right)$  の和を調べよ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \left( \frac{6}{k} - \frac{6}{k+1} \right) &= \frac{6}{3} - \frac{6}{4} + \frac{6}{4} - \frac{6}{5} + \cdots + \frac{6}{n-1} - \frac{6}{n} + \frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \\ &= 2 - \frac{6}{n+1} . \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n+1} = 0$  なので,

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n \left( \frac{6}{k} - \frac{6}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{6}{n+1} \right) \\ &= 2 . \end{aligned}$$

終

実数の定数  $a, r$  及び自然数の定数  $m$  に対して, 等比数列  $\{ar^n\}_{n \geq m}$  からできる級数  $\sum_{n=m}^{\infty} (ar^n)$  を等比級数という.

例 等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\}$  の和を調べる.

例 等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\}$  の和を調べる．級数の和の定義より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\} .$$

例 等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\}$  の和を調べる．級数の和の定義より

$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  . まず総和  $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  を計算する．

例 等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\}$  の和を調べる．級数の和の定義より

$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  . まず総和  $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  を計算する．

$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  とおく．

例 等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\}$  の和を調べる．級数の和の定義より

$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$ ．まず総和  $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  を計算する．

$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  とおく．

$$S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n,$$

例 等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\}$  の和を調べる．級数の和の定義より

$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  . まず総和  $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  を計算する．

$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  とおく．

$$S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n ,$$

$$\frac{3}{5} S_n = 4 \left( \frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^{n+1} ;$$

例 等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\}$  の和を調べる．級数の和の定義より

$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  . まず総和  $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  を計算する．

$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  とおく．

$$S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n ,$$

$$\frac{3}{5} S_n = 4 \left( \frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^{n+1} ;$$

この 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$\frac{2}{5} S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} - 4 \left( \frac{3}{5} \right)^{n+1} ,$$

例 等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\}$  の和を調べる．級数の和の定義より

$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  . まず総和  $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  を計算する．

$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\}$  とおく．

$$S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n ,$$

$$\frac{3}{5} S_n = 4 \left( \frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n + 4 \left( \frac{3}{5} \right)^{n+1} ;$$

この2個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$\frac{2}{5} S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} - 4 \left( \frac{3}{5} \right)^{n+1} ,$$

よって  $S_n = 6 - 10 \left( \frac{3}{5} \right)^{n+1}$  つまり  $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\} = 6 - 10 \left( \frac{3}{5} \right)^{n+1}$  .

$$\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\} = 6 - 10 \left( \frac{3}{5} \right)^{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\} = 6 - 10 \left( \frac{3}{5} \right)^{n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{5} \right)^{n+1} = 0$  なので,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left( \frac{3}{5} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 6 - 10 \left( \frac{3}{5} \right)^{n+1} \right\} = 6 - 10 \cdot 0 \\ &= 6 . \end{aligned}$$

終

問4.8.2 等比級数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^n \right\}$  の和を調べよ.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^k \right\} \cdot S_n = \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^k \right\} \text{ とおく.}$$

$$S_n = \qquad \qquad \qquad ,$$

$$\frac{2}{3} S_n = \qquad \qquad \qquad ,$$

$$\frac{1}{3} S_n = \qquad \qquad \qquad , \quad S_n = \qquad \qquad \qquad , \quad \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^k \right\} = \qquad \qquad \qquad .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} = \qquad \text{なので,}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 10 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \qquad \qquad \qquad \right\} =$$

問4.8.2 等比級数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^n \right\}$  の和を調べよ.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^k \right\} . \quad S_n = \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^k \right\} \quad \text{とおく.}$$

$$S_n = \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \frac{64}{81} + \cdots + 6 \left( \frac{2}{3} \right)^n ,$$

$$\frac{2}{3} S_n = \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \frac{64}{81} + \cdots + 6 \left( \frac{2}{3} \right)^n + 6 \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} ,$$

$$\frac{1}{3} S_n = \frac{8}{3} - 6 \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} , \quad S_n = 8 - 18 \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} , \quad \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^k \right\} = 8 - 18 \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} = \quad \text{なので,}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 10 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \quad \quad \quad \right\} =$$

問4.8.2 等比級数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^n \right\}$  の和を調べよ.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^k \right\} . \quad S_n = \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^k \right\} \quad \text{とおく.}$$

$$S_n = \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \frac{64}{81} + \cdots + 6 \left( \frac{2}{3} \right)^n ,$$

$$\frac{2}{3} S_n = \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \frac{64}{81} + \cdots + 6 \left( \frac{2}{3} \right)^n + 6 \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} ,$$

$$\frac{1}{3} S_n = \frac{8}{3} - 6 \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} , \quad S_n = 8 - 18 \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} , \quad \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^k \right\} = 8 - 18 \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 10 \left( \frac{3}{5} \right)^n \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left( \frac{2}{3} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 8 - 18 \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \right\} = 8 - 18 \cdot 0 \\ &= 8 . \end{aligned}$$

終

[定理 1.5.2] 正の各自然数  $n$  に対して、最初の項が  $a$  で公比が  $r$  である等比数列の初めの  $n$  個の項の総和は、 $r \neq 1$  のとき

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r},$$

$r = 1$  のとき

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = an.$$

[定理 1.5.2] 正の各自然数  $n$  に対して、最初の項が  $a$  で公比が  $r$  である等比数列の初めの  $n$  個の項の総和は、 $r \neq 1$  のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

例 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^n \right\}$  の和を調べる.

[定理 1.5.2] 正の各自然数  $n$  に対して、最初の項が  $a$  で公比が  $r$  である等比数列の初めの  $n$  個の項の総和は、 $r \neq 1$  のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

例 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^n \right\}$  の和を調べる．級数の和の定義より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^k \right\} .$$

[定理 1.5.2] 正の各自然数  $n$  に対して、最初の項が  $a$  で公比が  $r$  である等比数列の初めの  $n$  個の項の総和は、 $r \neq 1$  のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

例 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^n \right\}$  の和を調べる．級数の和の定義より

$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^k \right\}$  . まず総和  $\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^k \right\}$  を計算する．

[定理 1.5.2] 正の各自然数  $n$  に対して、最初の項が  $a$  で公比が  $r$  である等比数列の初めの  $n$  個の項の総和は、 $r \neq 1$  のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

[例] 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^n \right\}$  の和を調べる．級数の和の定義より

$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^k \right\}$ ．まず総和  $\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^k \right\}$  を計算する．

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^k \right\} = \underbrace{3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3 \left( \frac{5}{7} \right)^2 + 3 \left( \frac{5}{7} \right)^3 + \cdots + 3 \left( \frac{5}{7} \right)^n}_{\text{最初の項が } 3 \text{ で公比が } \frac{5}{7} \text{ で項数が } n+1} = \frac{3 \left\{ 1 - \left( \frac{5}{7} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{5}{7}}$$

[定理 1.5.2] 正の各自然数  $n$  に対して、最初の項が  $a$  で公比が  $r$  である等比数列の初めの  $n$  個の項の総和は、 $r \neq 1$  のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

最初の項が  $a$  で公比が  $r$  で項数が  $n$

[例] 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^n \right\}$  の和を調べる．級数の和の定義より

$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^k \right\}$  . まず総和  $\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^k \right\}$  を計算する．

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^k \right\} = 3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3 \left( \frac{5}{7} \right)^2 + 3 \left( \frac{5}{7} \right)^3 + \cdots + 3 \left( \frac{5}{7} \right)^n = \frac{3 \left\{ 1 - \left( \frac{5}{7} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{5}{7}}$$

$$= \frac{21}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{5}{7} \right)^{n+1} \right\} .$$

等比数列の項の総和の公式より

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^k \right\} = \frac{21}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{5}{7} \right)^{n+1} \right\} .$$

等比数列の項の総和の公式より

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^k \right\} = \frac{21}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{5}{7} \right)^{n+1} \right\} .$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{7} \right)^{n+1} = 0$  なので,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^n \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{5}{7} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{21}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{5}{7} \right)^{n+1} \right\} \right] = \frac{21}{2} (1 - 0) \\ &= \frac{21}{2} . \end{aligned}$$

□ 終

**問4.8.3** 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^n \right\}$  の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^k \right\} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{5} \right)^{n+1} = \quad \text{なので,}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{9}{7} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \quad \right] =$$

**問4.8.3** 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^n \right\}$  の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^k \right\} = \frac{3 \left\{ 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{2}{5}} = 5 \left\{ 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^{n+1} \right\} .$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{5} \right)^{n+1} =$   *なので,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \quad \quad \quad \right] =$$

問4.8.3 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^n \right\}$  の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^k \right\} = \frac{3 \left\{ 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{2}{5}} = 5 \left\{ 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^{n+1} \right\} .$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{5} \right)^{n+1} = 0$  なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 5 \left\{ 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^{n+1} \right\} \right] = 5 .$$

終

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  に対して,  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$  と定める.

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  に対して,  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$  と定める. 正の自然数  $n$  に対して,

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} ;$$

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  に対して,  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$  と定める. 正の自然数  $n$  に対して,

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} ;$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$S_n - S_{n-1} = a_n .$$

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  に対して,  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$  と定める. 正の自然数  $n$  に対して,

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} ;$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$S_n - S_{n-1} = a_n .$$

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束すると仮定する. 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  の和  $S$  がある.

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  に対して,  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$  と定める. 正の自然数  $n$  に対して,

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} ;$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$S_n - S_{n-1} = a_n .$$

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束すると仮定する. 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  の和  $S$  がある.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S .$$

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  に対して,  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$  と定める. 正の自然数  $n$  に対して,

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} ;$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$S_n - S_{n-1} = a_n .$$

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束すると仮定する. 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  の和  $S$  がある.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S .$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$  なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0 .$$

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  に対して,  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$  と定める. 正の自然数  $n$  に対して,

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} ;$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$S_n - S_{n-1} = a_n .$$

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束すると仮定する. 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  の和  $S$  がある.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S .$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$  なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0 .$$

このように, 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するならば 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は 0 に収束する.

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束する ならば 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は 0 に収束する.

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するならば数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は 0 に収束する.

この対偶をとると

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が 0 に収束しないならば級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は収束しない.

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するならば数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は 0 に収束する。

この対偶をとると

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が 0 に収束しないならば級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は収束しない。

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が 0 に収束しないのは次の二つの場合がある：

- (1) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は収束しないつまり発散する；
- (2) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は収束するけれど  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  .

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するならば数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は 0 に収束する。

この対偶をとると

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が 0 に収束しないならば級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は収束しない。

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が 0 に収束しないのは次の二つの場合がある：

- (1) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は収束しないつまり発散する；
- (2) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は収束するけれど  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  .

このどちらの場合も級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は収束しないつまり発散する。

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するならば数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は 0 に収束する。

この対偶をとると

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が 0 に収束しないならば級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は収束しない。

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が 0 に収束しないのは次の二つの場合がある：

- (1) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は収束しないつまり発散する；
- (2) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は収束するけれど  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  .

このどちらの場合も級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は収束しないつまり発散する。

### [定理 4.8.1]

- (1) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が発散するならば、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は発散する。
- (2) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が収束して  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  ならば、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は発散する。

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が収束して  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  ならば, 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は発散する.

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が収束して  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  ならば、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は発散する.

しかし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  でも級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するとは限らない；  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

でも級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が発散することがある.

例 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$  の和を調べる.

**例** 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$  の和を調べる. 公比  $\frac{6}{5}$  の等比数列  $\left\{\left(\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$  は発散するので, 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$  は発散する. **終**

**問4.8.4** 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{6}\right)^n$  の和を調べよ.

**問4.8.4** 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{6}\right)^n$  の和を調べよ.

公比  $-\frac{7}{6}$  の等比数列  $\left\{\left(-\frac{7}{6}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$  は発散するので、等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{6}\right)^n$  は発散する. **終**

例 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( 5 - \frac{3}{n+1} \right)$  の和を調べる.

例 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right)$  の和を調べる.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0$  なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right) = 5 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 5 - 0 = 5 .$$

例 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right)$  の和を調べる.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0$  なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right) = 5 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 5 - 0 = 5 .$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right) \neq 0$  なので, 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right)$  は発散する. 終

問4.8.5 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{8}{n^2+3} - 7 \right)$  の和を調べよ.

問4.8.5 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{8}{n^2+3} - 7 \right)$  の和を調べよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^2+3} = 0 \quad \text{なので,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{8}{n^2+3} - 7 \right) = 0 - 7 = -7 .$$

問4.8.5 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{8}{n^2+3} - 7 \right)$  の和を調べよ.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^2+3} = 0$  なので,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{8}{n^2+3} - 7 \right) = 0 - 7 = -7$ . よって

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{8}{n^2+3} - 7 \right) \neq 0$  なので, 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{8}{n^2+3} - 7 \right)$  は発散する.

終

例 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$  の和を調べる.

例 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$  の和を調べる. 級数の和の定義より  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$  .

例 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$  の和を調べる. 級数の和の定義より  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$ .

まず  $\sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$  を計算する.

例 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$  の和を調べる. 級数の和の定義より  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$ .

まず  $\sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$  を計算する.

$$\sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k} = \underbrace{5 + 5 \cdot \frac{1}{3} + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{最初の項が } 5 \text{ で公比が } \frac{1}{3} \text{ で項数が } n+1} = \frac{5 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$

例 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$  の和を調べる．級数の和の定義より  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$  .

まず  $\sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$  を計算する．

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k} &= 5 + 5 \cdot \frac{1}{3} + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{15}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right) . \end{aligned}$$

例 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$  の和を調べる. 級数の和の定義より  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$ .

まず  $\sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$  を計算する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k} &= 5 + 5 \cdot \frac{1}{3} + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{15}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right). \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$  なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{15}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right) \right\} = \frac{15}{2}.$$

終

問4.8.6 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n}$  の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^n \frac{6}{4^k} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^{n+1}} = \quad \text{なので,}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{6}{4^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \quad \quad \quad \right\} =$$

問4.8.6 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n}$  の和を調べよ.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{6}{4^k} &= \sum_{k=0}^n \left\{ 6 \left( \frac{1}{4} \right)^k \right\} = \frac{6 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{6 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} \right\}}{\frac{3}{4}} \\ &= 8 \left( 1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right).\end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^{n+1}} =$  ないので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{6}{4^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \quad \quad \quad \right\} =$$

問4.8.6 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n}$  の和を調べよ.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{6}{4^k} &= \sum_{k=0}^n \left\{ 6 \left( \frac{1}{4} \right)^k \right\} = \frac{6 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{6 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} \right\}}{\frac{3}{4}} \\ &= 8 \left( 1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right).\end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^{n+1}} = 0$  なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{6}{4^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 8 \left( 1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) \right\} = 8.$$

終

正の自然数  $n$  及び実数  $a$  及び  $1$  以外の実数  $r$  について,

$$\sum_{k=0}^n (ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} ;$$

4.7節で次の定理を述べた.

[定理 4.7.1] 定数  $r$  を公比とする無限等比数列  $\{r^n\}$  について,

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty ;$$

$$r = 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1 ;$$

$$-1 < r < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 ;$$

$r \leq -1$  のとき, 無限等比数列  $\{r^n\}$  は発散するが,  $\infty$  にも  $-\infty$  にも発散しない (振動する).

正の自然数  $n$  及び実数  $a$  及び  $1$  以外の実数  $r$  について,

$$\sum_{k=0}^n (ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r};$$

$-1 < r < 1$  のとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$  なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (ar^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r}.$$

正の自然数  $n$  及び実数  $a$  及び  $1$  以外の実数  $r$  について,

$$\sum_{k=0}^n (ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r};$$

$-1 < r < 1$  のとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$  なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (ar^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r}.$$

このようにして次の定理が導かれる.

[定理 4.8.2] 最初の項が  $a$  で公比が  $r$  である無限等比数列に対する級数は,  
 $|r| < 1$  のとき収束して

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \frac{a}{1-r},$$

$|r| \geq 1$  かつ  $a \neq 0$  のとき発散する.

例 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \left( \frac{3}{7} \right)^n \right\}$  の和を調べる.

例 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \left( \frac{3}{7} \right)^n \right\}$  の和を調べる. 等比数列  $\left\{ 2 \left( \frac{3}{7} \right)^n \right\}_{n \geq 1}$  の公比  $\frac{3}{7}$  について  $\left| \frac{3}{7} \right| < 1$  なのでこの級数は収束する.

例 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \left( \frac{3}{7} \right)^n \right\}$  の和を調べる. 等比数列  $\left\{ 2 \left( \frac{3}{7} \right)^n \right\}_{n \geq 1}$  の公比  $\frac{3}{7}$  について  $\left| \frac{3}{7} \right| < 1$  なのでこの級数は収束する.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \left( \frac{3}{7} \right)^n \right\} &= \frac{6}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{6}{7} \left( \frac{3}{7} \right)^2 + \frac{6}{7} \left( \frac{3}{7} \right)^3 + \frac{6}{7} \left( \frac{3}{7} \right)^4 + \cdots = \frac{\frac{6}{7}}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{6}{4} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

終

問4.8.7 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^n \right\}$  の和を調べよ.

問4.8.7 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^n \right\}$  の和を調べよ.

等比数列  $\left\{ 2 \left( \frac{2}{5} \right)^n \right\}_{n \geq 1}$  の公比  $\frac{2}{5}$  について  $\left| \frac{2}{5} \right| < 1$  なのでこの級数は収束する.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 3 \left( \frac{2}{5} \right)^n \right\} = \frac{6}{5} + \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{6}{5} \left( \frac{2}{5} \right)^2 + \frac{6}{5} \left( \frac{2}{5} \right)^3 + \cdots = \frac{\frac{6}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{6}{3} = 2 .$$

級数について次の定理が成り立つ.

[定理 4.8.3] 定数  $c$  及び数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  について, 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するならば, 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n)$  も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

[定理 4.8.4] 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  と  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  について, 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  と  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  とが収束するならば, 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad (\text{複号同順}) .$$