

4.7 数列の極限

数列とは、定義域が自然数の集合である関数のことである；但し、数列の定義域はひと続きの自然数の集合でなければならない。

数列とは、定義域が自然数の集合である関数のことである；但し、数列の定義域はひと続きの自然数の集合でなければならない。

関数の定義域の要素を表す変数を独立変数という。数列では、定義域の要素は自然数なので、独立変数は自然数を表す。それで、通常、数列の独立変数には i, j, k, l, m, n などの文字を使う。

数列とは、定義域が自然数の集合である関数のことである；但し、数列の定義域はひと続きの自然数の集合でなければならない。

関数の定義域の要素を表す変数を独立変数という。数列では、定義域の要素は自然数なので、独立変数は自然数を表す。それで、通常、数列の独立変数には i, j, k, l, m, n などの文字を使う。

数列 a について、自然数 n における値つまり第 n 項 $a(n)$ をしばしば a_n と書き表す；そして、数列 a そのものを $\{a_n\}$ と書き表す。つまり、自然数を表す変数 n に対して、

数列 $\{a_n\}$ は n を独立変数とする関数である。

定義域が無限集合である数列を無限数列という。無限数列の極限を考える。

定義域が無限集合である数列を無限数列という．無限数列の極限を考える．

準備として変数 x について $x \rightarrow \infty$ のときの関数 $f(x)$ の極限値の定義を復習する．

[定義] 変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり、

$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

$f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を $f(x)$ の極限 (値)

という。 $x \rightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c .$$

関数 $f(x)$ について、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は発散するという。

[定義] 変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり、

$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

$f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を $f(x)$ の極限 (値)

という。 $x \rightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c .$$

関数 $f(x)$ について、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は発散するという。

無限数列は、関数であり、この定義の前提条件 “どんなに大きい実数 K に対しても $x > K$ である定義域の実数 x がある” を満たす。よって、この関数の極限の定義は無限数列に適用できる。

[定義] 無限数列 $\{a_n\}$ について,

自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと

項 a_n の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき, $n \rightarrow \infty$ のとき $\{a_n\}$ は c に収束するといい, c を $\{a_n\}$ の極限值という; この極限值 c を $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と書き表す: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$. 無限数列 $\{a_n\}$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき $\{a_n\}$ がどんな実数にも収束しないとき, $x \rightarrow \infty$ のとき $\{a_n\}$ は発散するという.

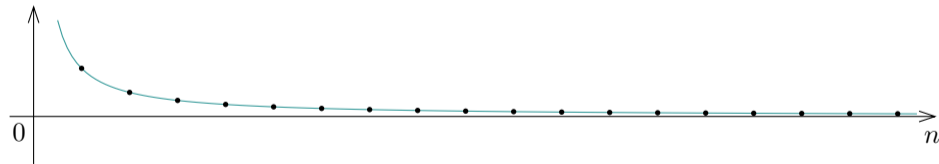
無限数列 $\{a_n\}$ の極限は $n \rightarrow \infty$ のときの極限しかないので, しばしば “ $n \rightarrow \infty$ のとき” という文言を省く. つまり “数列 $\{a_n\}$ の極限” というとき $n \rightarrow \infty$ のときの極限を意味する.

例 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ は、関数 $\frac{1}{x}$ において変数 x の値を正の自然数に限定したものである。

例 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ は、関数 $\frac{1}{x}$ において変数 x の値を正の自然数に限定したものである。数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ は、 $x \rightarrow \infty$ のときの関数 $\frac{1}{x}$ の極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ において x の値を正の自然数に限定したものである。

例 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ は、関数 $\frac{1}{x}$ において変数 x の値を正の自然数に限定したものである。数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ は、 $x \rightarrow \infty$ のときの関数 $\frac{1}{x}$ の極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ において x の値を正の自然数に限定したものである。 $x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{x}$ は 0 に収束する： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

例 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ は、関数 $\frac{1}{x}$ において変数 x の値を正の自然数に限定したものである。数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ は、 $x \rightarrow \infty$ のときの関数 $\frac{1}{x}$ の極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ において x の値を正の自然数に限定したものである。 $x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{x}$ は 0 に収束する： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 。よって、数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ は 0 に収束する： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 。



数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ のグラフ

終

例 定数 a を底とする指数関数 a^x には, $a > 0$ かつ $a \neq 1$ という前提条件がある. 例えば $\left(-\frac{1}{2}\right)^x$ というような指数関数は考えない.

例 定数 a を底とする指数関数 a^x には, $a > 0$ かつ $a \neq 1$ という前提条件がある. 例えば $\left(-\frac{1}{2}\right)^x$ というような指数関数は考えない. しかし, 数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ は考えられる.

例 定数 a を底とする指数関数 a^x には、 $a > 0$ かつ $a \neq 1$ という前提条件がある．例えば $\left(-\frac{1}{2}\right)^x$ というような指数関数は考えない．しかし，数列

$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ は考えられる．

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8},$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1}{128}, \quad \dots$$

であり，

例 定数 a を底とする指数関数 a^x には、 $a > 0$ かつ $a \neq 1$ という前提条件がある．例えば $\left(-\frac{1}{2}\right)^x$ というような指数関数は考えない．しかし，数列

$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ は考えられる．

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8},$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1}{128}, \quad \dots$$

であり，数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ は 0 に収束する： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ．

終

[定義] 変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり、変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

と書き表す。

数列は関数なので、この関数の極限の定義を無限数列に適用する。

[定義] 変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり、変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

と書き表す。

数列は関数なので、この関数の極限の定義を無限数列に適用する。

[定義] 無限数列 $\{a_n\}$ について、自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと a_n の値も限りなく大きくなるとき、数列 $\{a_n\}$ は ∞ に発散するといひ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

と書き表す。

例を挙げる：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = \infty , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty .$$

[定義] 変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり、変数 x の値を限りなく大きくしていくと、 $f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は $-\infty$ に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す。

数列は関数なので、この関数の極限の定義を無限数列に適用する。

[定義] 変数 x の関数 $f(x)$ について、どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり、変数 x の値を限りなく大きくしていくと、 $f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は $-\infty$ に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す。

数列は関数なので、この関数の極限の定義を無限数列に適用する。

[定義] 無限数列 $\{a_n\}$ について、自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと、 $a_n < 0$ であってその絶対値 $|a_n|$ が限りなく大きくなるとき、数列 $\{a_n\}$ は $-\infty$ に発散するといひ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

と書き表す。

数列について，発散するが ∞ に発散するのも $-\infty$ に発散するのもないとき，振動するという．“振動する” というのは数列の極限に特有の言葉である；一般的な関数の極限では用いない．

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を $a_n = (-2)^n$ と定める：

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = -8, \quad a_4 = 16, \quad a_5 = -32, \quad \dots$$

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を $a_n = (-2)^n$ と定める：

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = -8, \quad a_4 = 16, \quad a_5 = -32, \quad \dots$$

この数列は発散する（収束しない）が、 ∞ に発散するのでも $-\infty$ に発散するのでもない。つまりこの数列は振動する。 **終**

結局，無限数列の極限について次のように分類される：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{収束する} = \text{唯一つの実数に限りなく近づく} = \text{極限值がある} \\ \text{収束しない} = \text{極限值がない} = \text{発散する} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \infty \text{ に発散する} \\ -\infty \text{ に発散する} \\ \text{それ以外（振動する）} \end{array} \right. .$$

無限数列の極限は関数の極限の一種なので、関数の極限值に関する定理の多くは数列の極限にも適用できる。

[定理 4.2.1] 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x について $x \rightarrow a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \pm \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\} \quad (\text{複号同順}),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right\};$$

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

この定理を数列の極限に適用する.

[定理 4.7.1] 無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束するならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \pm \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) ;$$

$b_n \neq 0$ で, 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} .$$

[定理 4.7.1] 無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束するならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \pm \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) ;$$

$b_n \neq 0$ で, 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} .$$

この定理より, 例えば次のことが導かれる: 自然数を表わす変数 n と無関係な定数 k について, 定数関である数列 $\{k\}$ の極限值は $\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$ なので, 無限数列 $\{a_n\}$ が収束するならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + k) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + k ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k a_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} k \right) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

[定理 4.2.2] 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ があるとする. 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x について $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right).$$

この定理を無限数列の極限に適用する.

[定理 4.2.2] 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ があるとする. 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x について $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right).$$

この定理を無限数列の極限に適用する.

[定理 4.7.2] 数列 $\{a_n\}$ の項は総て関数 f の定義域に属すとする. $\{a_n\}$ が収束してかつ極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ において関数 f が連続であるならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right).$$

[定理 4.2.3] 定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて, $f(x) = g(y)$ で, $x \rightarrow a$ のとき $y \rightarrow b$, $y \neq b$ とする. $y \rightarrow b$ のとき $g(y)$ が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) .$$

この定理を無限数列の極限に適用する.

[定理 4.2.3] 定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて, $f(x) = g(y)$ で, $x \rightarrow a$ のとき $y \rightarrow b$, $y \neq b$ とする. $y \rightarrow b$ のとき $g(y)$ が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) .$$

この定理を無限数列の極限に適用する.

[定理 4.7.3] 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 自然数を表す変数 n 及び数列 $\{a_n\}$ と, 変数 x の関数 $f(x)$ とについて, $a_n = f(x)$ で, $n \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow a$, $x \neq a$ とする. $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が収束するならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow a} f(x) .$$

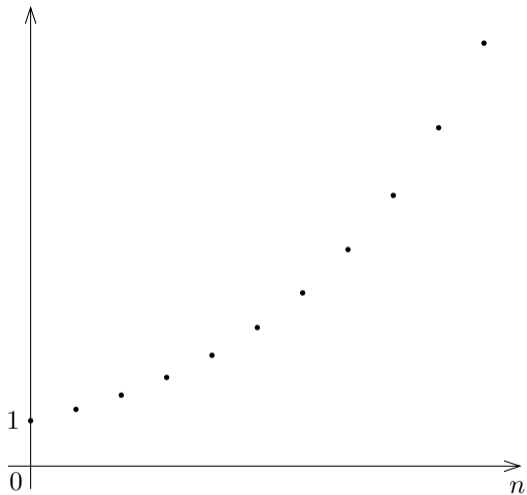
等比数列の極限を考える.

例 公比が $\frac{5}{4}$ の等比数列

列 $\left\{ \left(\frac{5}{4} \right)^n \right\}_{n \geq 0}$ のグラフ

は右図のようになる。こ

の等比数列は

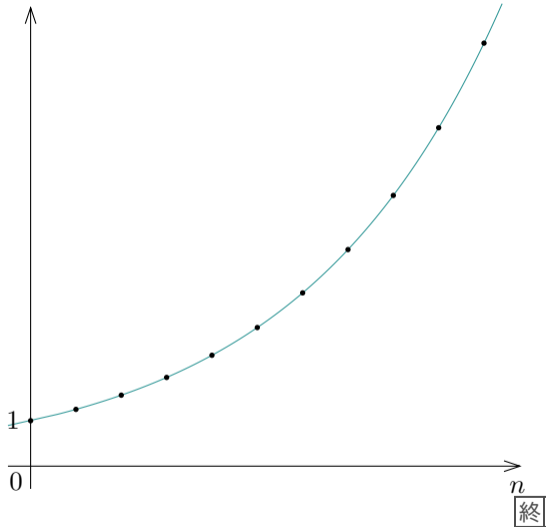


例 公比が $\frac{5}{4}$ の等比数

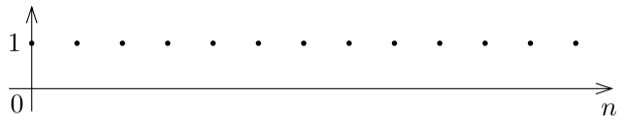
列 $\left\{ \left(\frac{5}{4} \right)^n \right\}_{n \geq 0}$ のグラフ

は右図のようになる。この等比数列は正の無限大に発散する：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4} \right)^n = \infty .$$



例 公比が 1 の等比
数列 $\{1^n\}_{n \geq 0}$ のグラ
フは右図のようにな
る．この等比数列は



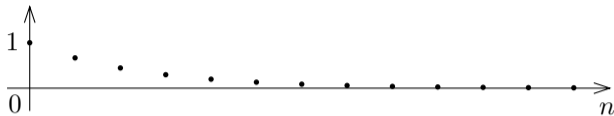
例 公比が $\frac{2}{3}$ の等比

数列 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ の

グラフは右図のよう

になる．この等比数

列は



例 公比が $\frac{2}{3}$ の等比

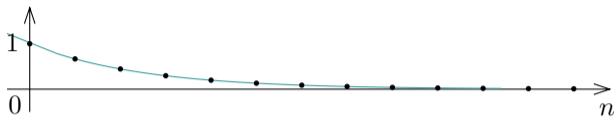
数列 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ の

グラフは右図のよう

になる．この等比数

列は 0 に収束する：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 .$$



終

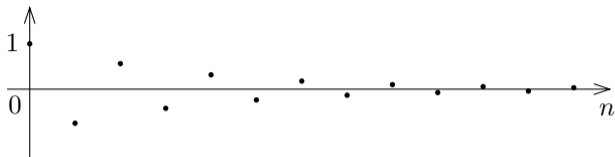
例 公比が $-\frac{3}{4}$ の等

比数列 $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$

のグラフは右図の

ようになる。この等

比数列は

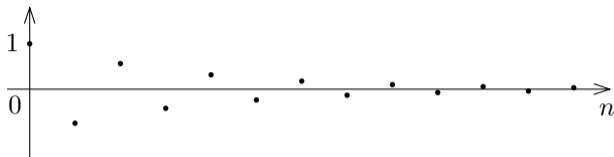


例 公比が $-\frac{3}{4}$ の等

比数列 $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$

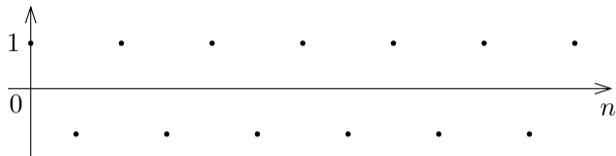
のグラフは右図の
ようになる。この等
比数列は 0 に収束
する：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0 .$$

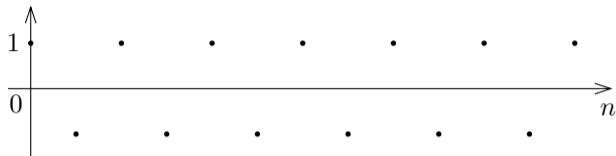


終

例 公比が -1 の等比数列 $\{(-1)^n\}_{n \geq 0}$ のグラフは右図のようになる．この等比数列は



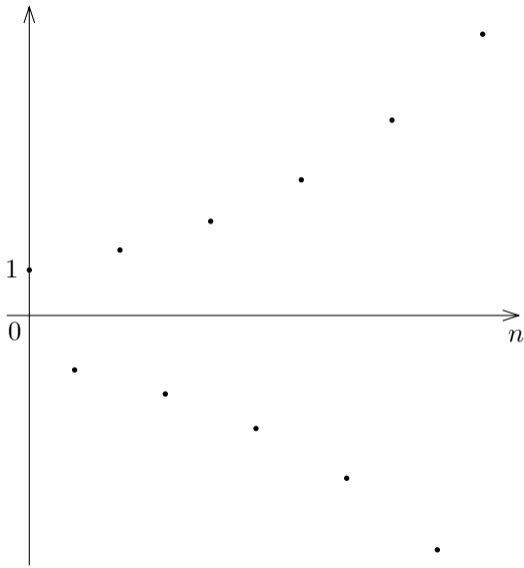
例 公比が -1 の等比数列 $\{(-1)^n\}_{n \geq 0}$ のグラフは右図のようになる。この等比数列は発散するが、 ∞ に発散するのでも $-\infty$ に発散するのでもない；つまりこの数列は振動する。



終

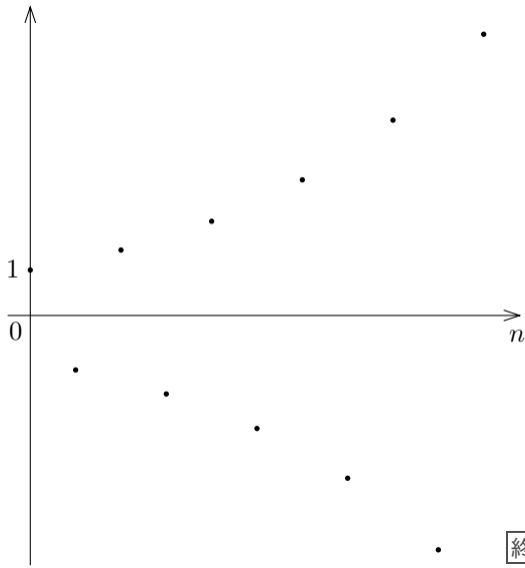
例 公比が $-\frac{6}{5}$ の等比数

列 $\left\{\left(-\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ のグラフは右図のようになる。この数列は



例 公比が $-\frac{6}{5}$ の等比数

列 $\left\{\left(-\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ のグラフは右図のようになる。この数列は発散するが、 ∞ に発散するのでも $-\infty$ に発散するのでもない；つまりこの数列は振動する。



[定理 4.7.4] 定数 r を公比とする無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限は次のようになる：

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty ;$$

$$r = 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1 ;$$

$$-1 < r < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 ;$$

$r \leq -1$ のとき、無限等比数列 $\{r^n\}$ は発散するが、 ∞ にも $-\infty$ にも発散しない（振動する）。

例 数列 $\left\{ \sqrt{\frac{2n+5}{3}} - 8 \right\}_{n \geq 0}$ の極限を調べる.

例 数列 $\left\{ \sqrt{\frac{2n+5}{3}} - 8 \right\}_{n \geq 0}$ の極限を調べる. 変数 x を $x = \frac{2n+5}{3}$ とお

く.

例 数列 $\left\{ \sqrt{\frac{2n+5}{3}} - 8 \right\}_{n \geq 0}$ の極限を調べる．変数 x を $x = \frac{2n+5}{3}$ とお

く． $\sqrt{\frac{2n+5}{3}} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ． $n \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow \infty$ ．

[例] 数列 $\left\{ \sqrt{\frac{2n+5}{3}} - 8 \right\}_{n \geq 0}$ の極限を調べる. 変数 x を $x = \frac{2n+5}{3}$ とお

く. $\sqrt{\frac{2n+5}{3}} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. $n \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+5}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{2}} = \infty,$$

[公式] 0 でない定数 p を指数とする冪関数 x^p ($x > 0$) について,
 $p > 0$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p = \infty$, $p < 0$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p = 0$.

例 数列 $\left\{ \sqrt{\frac{2n+5}{3}} - 8 \right\}_{n \geq 0}$ の極限を調べる．変数 x を $x = \frac{2n+5}{3}$ とお

く． $\sqrt{\frac{2n+5}{3}} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ． $n \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow \infty$ ．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+5}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{2}} = \infty ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{2n+5}{3}} - 8 \right) = \infty .$$

例 数列 $\left\{ \sqrt{\frac{2n+5}{3}} - 8 \right\}_{n \geq 0}$ の極限を調べる．変数 x を $x = \frac{2n+5}{3}$ とお

く． $\sqrt{\frac{2n+5}{3}} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ． $n \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow \infty$ ．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+5}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{2}} = \infty ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{2n+5}{3}} - 8 \right) = \infty .$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+5}{3}} = \infty$ は発散しているので $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{2n+5}{3}} - 8 \right)$ を

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+5}{3}} - 8$ に変形しないこと．

終

問4.7.1 数列 $\left\{ \frac{7}{\sqrt{n+3}} + 4 \right\}_{n \geq 0}$ について、収束するか発散するかを調べ、収束するならばその極限値を求めよ.

$$\frac{7}{\sqrt{n+3}} + 4 = 7(n+3) + 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (n+3) = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{\sqrt{n+3}} + 4 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 7(n+3) + 4 \right\} =$$

問4.7.1 数列 $\left\{ \frac{7}{\sqrt{n+3}} + 4 \right\}_{n \geq 0}$ について、収束するか発散するかを調べ、収束するならばその極限値を求めよ.

$$\frac{7}{\sqrt{n+3}} + 4 = 7(n+3)^{-\frac{1}{2}} + 4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)^{-\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{\sqrt{n+3}} + 4 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 7(n+3)^{-\frac{1}{2}} + 4 \right\} = 7 \cdot 0 + 4 = 4. \quad \boxed{\text{終}}$$

例 数列 $\left\{7 - \frac{5}{2^{n-3}}\right\}_{n \geq 1}$ の極限を調べる.

例 数列 $\left\{7 - \frac{5}{2^{n-3}}\right\}_{n \geq 1}$ の極限を調べる. $7 - \frac{5}{2^{n-3}} = 7 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

例 数列 $\left\{7 - \frac{5}{2^{n-3}}\right\}_{n \geq 1}$ の極限を調べる. $7 - \frac{5}{2^{n-3}} = 7 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$. 変数

m を $m = n - 3$ とおく.

例 数列 $\left\{7 - \frac{5}{2^{n-3}}\right\}_{n \geq 1}$ の極限を調べる. $7 - \frac{5}{2^{n-3}} = 7 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$. 変数 m を $m = n - 3$ とおく. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^m$. $n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$.

例 数列 $\left\{7 - \frac{5}{2^{n-3}}\right\}_{n \geq 1}$ の極限を調べる. $7 - \frac{5}{2^{n-3}} = 7 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$. 変数

m を $m = n - 3$ とおく. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^m$. $n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 0,$$

[定理 4.7.4] 定数 r を公比とする無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限は次のようになる:

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty ;$$

$$r = 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1 ;$$

$$-1 < r < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 ;$$

$r \leq -1$ のとき, 無限等比数列 $\{r^n\}$ は発散するが, ∞ にも $-\infty$ にも発散しない (振動する).

例 数列 $\left\{7 - \frac{5}{2^{n-3}}\right\}_{n \geq 1}$ の極限を調べる. $7 - \frac{5}{2^{n-3}} = 7 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$. 変数

m を $m = n - 3$ とおく. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^m$. $n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 - \frac{5}{2^{n-3}}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{7 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\} = 7 - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 7 - 5 \cdot 0 \\ &= 7. \end{aligned}$$

終

問4.7.2 数列 $\left\{8 - 5\left(-\frac{6}{7}\right)^{n-3}\right\}_{n \geq 1}$ の極限を調べよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{6}{7}\right)^{n-3} = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{8 - 5\left(-\frac{6}{7}\right)^{n-3}\right\} =$$

問4.7.2 数列 $\left\{8 - 5\left(-\frac{6}{7}\right)^{n-3}\right\}_{n \geq 1}$ の極限を調べよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{6}{7}\right)^{n-3} = 0 \text{ なので,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{8 - 5\left(-\frac{6}{7}\right)^{n-3}\right\} = 8 - 5 \cdot 0 = 8 .$$

終

問4.7.3 数列 $\left\{ \frac{8}{3^{n+2}} - 4 \right\}_{n \geq 0}$ の極限を調べよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{n+2} = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3^{n+2}} - 4 \right) =$$

問4.7.3 数列 $\left\{ \frac{8}{3^{n+2}} - 4 \right\}_{n \geq 0}$ の極限を調べよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{n+2} = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3^{n+2}} - 4 \right) = 8 \cdot 0 - 4 = -4 .$$

終

例 数列 $\left\{ \frac{3^{n+2}}{4^n} \right\}_{n \geq 0}$ の極限を調べる.

例 数列 $\left\{ \frac{3^{n+2}}{4^n} \right\}_{n \geq 0}$ の極限を調べる. $\frac{3^{n+2}}{4^n} = \frac{3^2 3^n}{4^n} = 3^2 \left(\frac{3}{4} \right)^n$.

例 数列 $\left\{ \frac{3^{n+2}}{4^n} \right\}_{n \geq 0}$ の極限を調べる. $\frac{3^{n+2}}{4^n} = \frac{3^2 3^n}{4^n} = 3^2 \left(\frac{3}{4} \right)^n$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0$ なので,

[定理 4.7.4] 定数 r を公比とする無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限は次のようになる:

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty ;$$

$$r = 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1 ;$$

$$-1 < r < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 ;$$

$r \leq -1$ のとき, 無限等比数列 $\{r^n\}$ は発散するが, ∞ にも $-\infty$ にも発散しない (振動する).

例 数列 $\left\{ \frac{3^{n+2}}{4^n} \right\}_{n \geq 0}$ の極限を調べる. $\frac{3^{n+2}}{4^n} = \frac{3^2 3^n}{4^n} = 3^2 \left(\frac{3}{4} \right)^n$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0$ なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2}}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3^2 \left(\frac{3}{4} \right)^n \right\} = 3^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 3^2 \cdot 0 = 0 .$$

終

問4.7.4 数列 $\left\{ \frac{5^n}{4^{n+3}} \right\}_{n \geq 0}$ について、収束するか発散するかを調べ、収束するならばその極限値を求めよ.

$$\frac{5^n}{4^{n+3}} = \left(\frac{5}{4}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{4^{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{5}{4}\right)^n \right\} =$$

問4.7.4 数列 $\left\{ \frac{5^n}{4^{n+3}} \right\}_{n \geq 0}$ について、収束するか発散するかを調べ、収束するならばその極限値を求めよ.

$$\frac{5^n}{4^{n+3}} = \frac{1}{4^3} \left(\frac{5}{4} \right)^n . \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4} \right)^n = \infty \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{4^{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{4^3} \left(\frac{5}{4} \right)^n \right\} = \infty .$$

終

もう一つ定理を述べる（証明は省略する）。

[定理 4.7.5] 無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とは収束するとする。これらの両方の定義域に属す任意の自然数 n について $a_n \geq b_n$ ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.