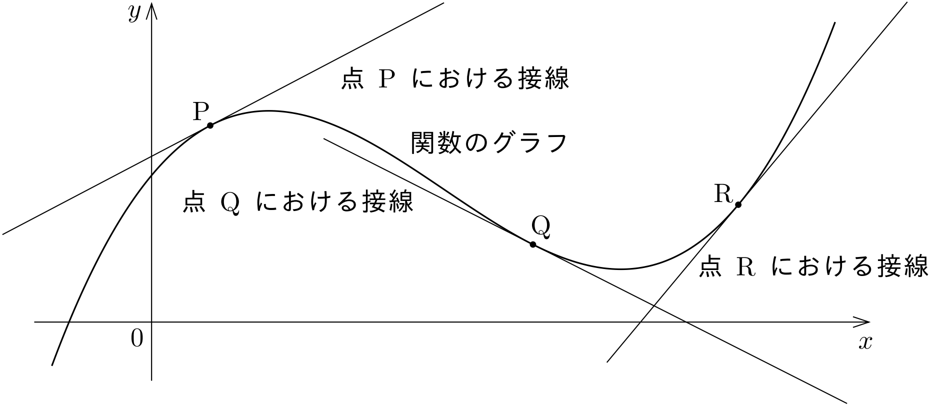
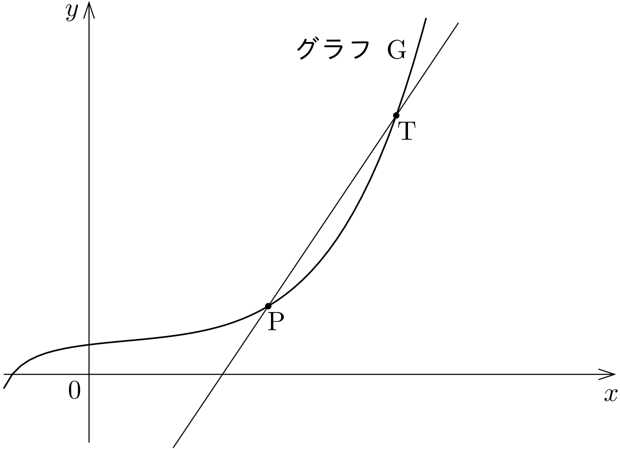
4.6 関数のグラフの接線と法線

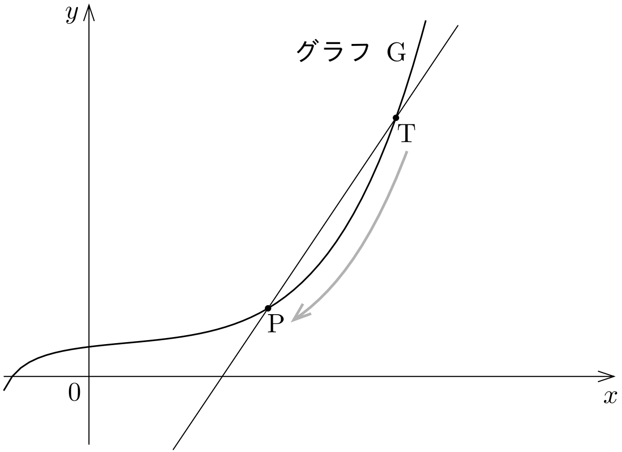
関数のグラフの点における接線とは，直感的にいうと，下図のようにその点においてグラフに“接する”直線のことである.



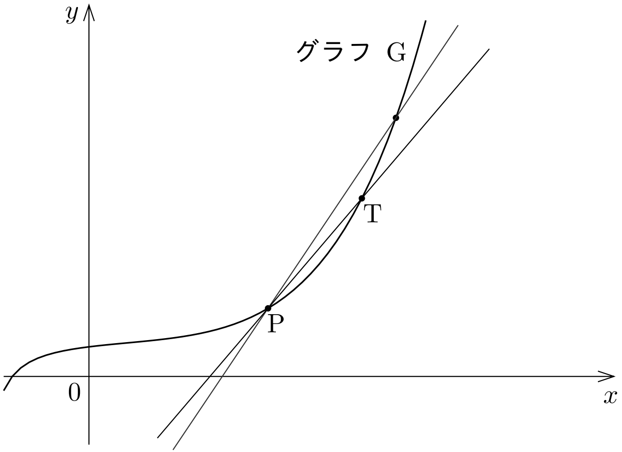
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（T $\neq$ P）をとり，直線 PT を考える．



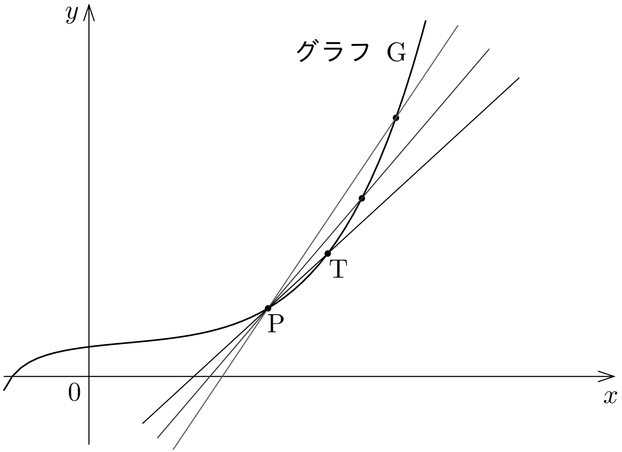
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（$\mathrm{T} \neq \mathrm{P}$）をとり，直線 PT を考る．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



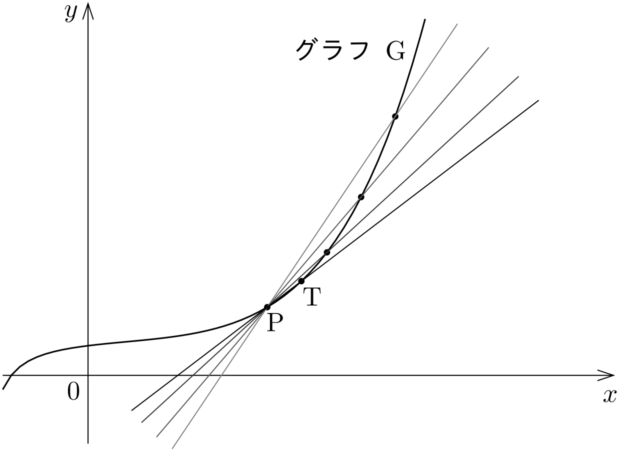
　座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T (T $\neq$ P) をとり，直線 PT を考る．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



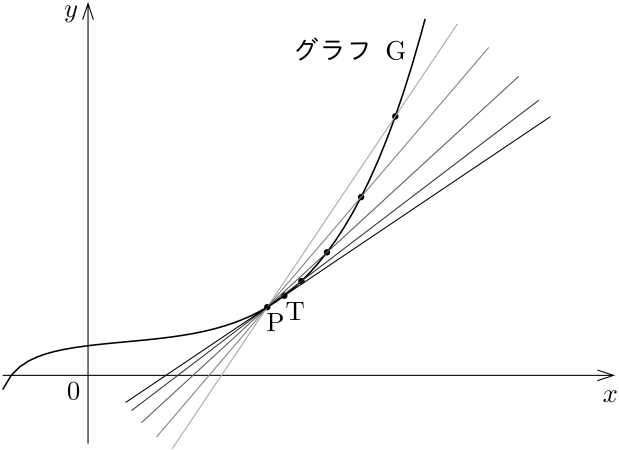
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（T$\neq$P）をとり，直線 PT を考える．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



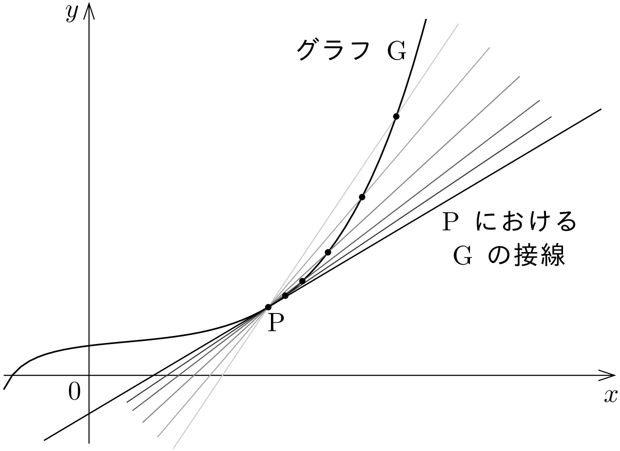
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（ T$\neq$P ）をとり，直線 PT を考る．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



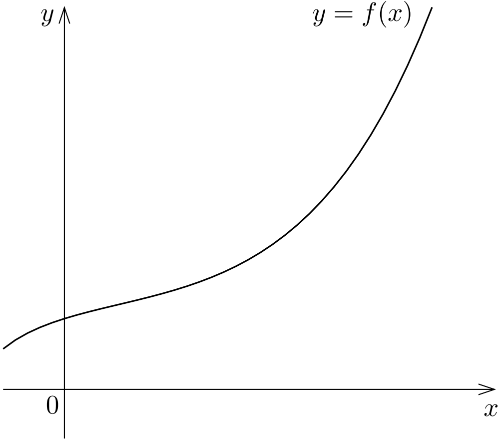
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（ T $\neq$ P ）をとり，直線 PT を考る．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



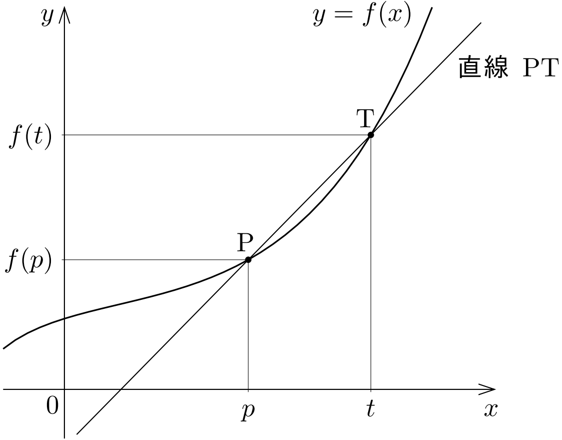
動点 T を定点 P に限りなく近づけるとき，直線 PT がある 1 本の直線 L に限りなく近づくならば，この直線 L を点 P におけるグラフ G の接線といい，点 P を接点という.



関数 f は定義域の実数 p において微分可能であるとする．xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフを考える．

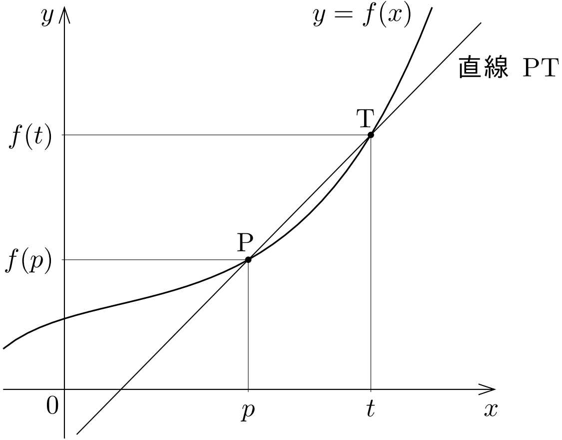


関数 f は定義域の実数 p において微分可能であるとする．xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフを考える．$t \neq p$ である定数 p と変数 t とに対して，グラフに属す定点 $\mathrm{P}=\bigl(p, f(p)\bigr)$ と動点 $\mathrm{T}=\bigl(t, f(t)\bigr)$ とをとり，直線 PT を引く．

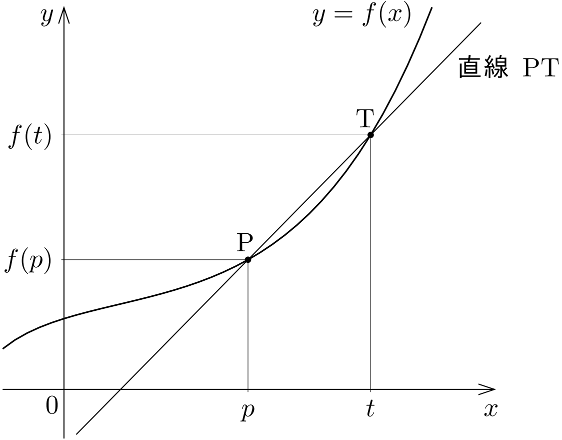


関数 f は定義域の実数 p において微分可能であるとする．xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフを考える．$t \neq p$ である定数 p と変数 t とに対して，グラフに属す定点 $\mathrm{P}=\big(p, f(p)\big)$ と動点 $\mathrm{T}=\big(t, f(t)\big)$ とをとり，直線 PT を引く．直線 PT の傾きは

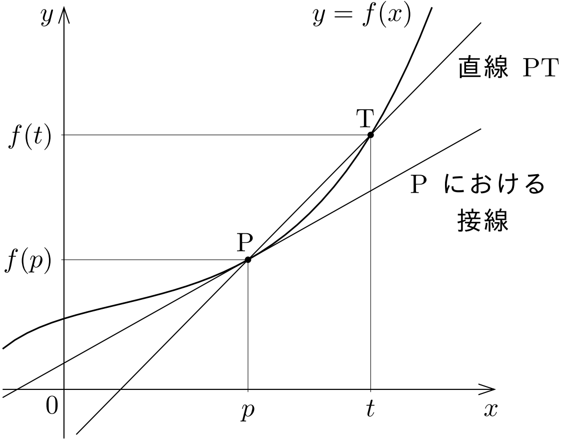
　　　　　　である．



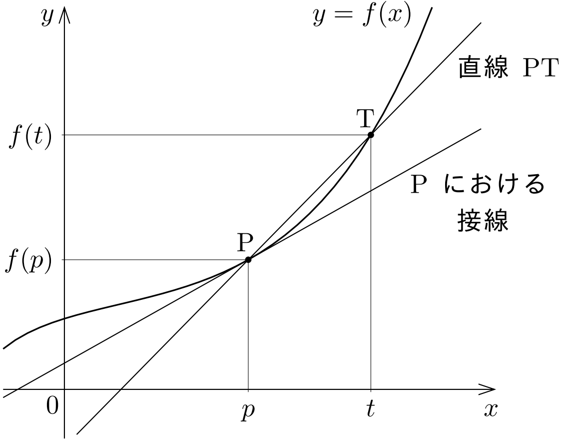
関数 f は定義域の実数 p において微分可能であるとする．xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフを考える．$t \neq p$ である定数 p と変数 t とに対して，グラフに属す定点 $\mathrm{P}=\bigl(p, f(p)\bigr)$ と動点 $\mathrm{T}=\bigl(t, f(t)\bigr)$ とをとり，直線 PT を引く．直線 PT の傾きは f の平均変化率 $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．



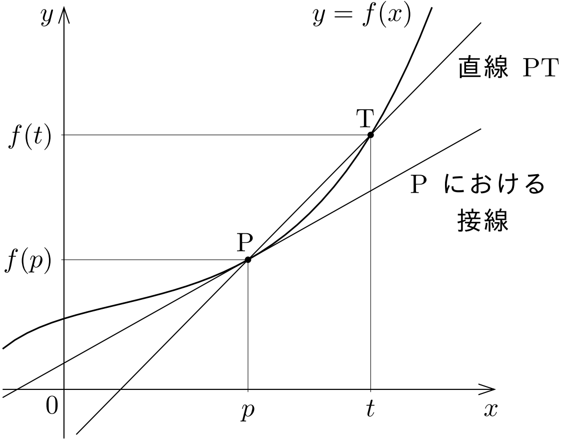
$t \to p$ のとき，グラフに属す動点 T は定点 P に限りなく近づく；このときの直線 PT の極限が f のグラフの P における接線である．



$t \to p$ のとき，グラフに属す動点 T は定点 P に限りなく近づく；このときの直線 PT の極限が f のグラフの P における接線である．つまり，グラフの点 P における接線は，直線 PT の $t \to p$ のときの極限である．



$t \to p$ のとき，グラフに属す動点 T は定点 P に限りなく近づく；このときの直線 PT の極限が f のグラフの P における接線である．つまり，グラフの点 P における接線は，直線 PT の $t \to p$ のときの極限である．よって，f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$



の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．

関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．

関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t \to p} \frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．この極限値は p における f の微分係数である．

関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．この極限値は p における f の微分係数である．

$$\text{直線 PT} \cdots \text{傾き } \frac{f(t)-f(p)}{t-p}$$

関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．この極限値は p における f の微分係数である．

直線 PT … 傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$

$t \to p$ とする $\Downarrow$ 動点 $\mathrm{T}=\bigl(t, f(t)\bigr)$ は定点 $\mathrm{P}=\bigl(p, f(p)\bigr)$ に限りなく近づく

関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．この極限値は p における f の微分係数である．

直線 PT … 傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$

$t \to p$ とする $\Downarrow$ 動点 $\mathrm{T}=\big(t, f(t)\big)$ は定点 $\mathrm{P}=\big(p, f(p)\big)$ に限りなく近づく

点 P における接線 … 傾き $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ ＝〔 p における f の微分係数〕

　関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．この極限値は p における f の微分係数である．

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{直線 PT} \cdots \text{傾き } \dfrac{f(t)-f(p)}{t-p} \\
t \to p \text{ とする} & \Big\Downarrow \text{動点 } \mathrm{T}=\big(t, f(t)\big) \text{ は定点 } \mathrm{P}=\big(p, f(p)\big) \text{ に限りなく近づく} \\
\text{点 P における接線} \cdots \text{傾き } \displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p} & = \text{〔} p \text{ における } f \text{ の微分係数〕}
\end{array}
$$

よって，f のグラフの点 $\mathrm{P}=\big(p, f(p)\big)$ における接線の傾きは，p における f の微分係数である．

関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t \to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．この極限値は p における f の微分係数である．

$$\text{直線 PT} \cdots \text{傾き} \ \frac{f(t)-f(p)}{t-p}$$

$t \to p$ とする $\Big\Downarrow$ 動点 $\mathrm{T}=\big(t, f(t)\big)$ は定点 $\mathrm{P}=\big(p, f(p)\big)$ に限りなく近づく

点 P における接線 $\cdots$ 傾き $\displaystyle\lim_{t \to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ ＝〔 p における f の微分係数〕

よって，f のグラフの点 $\mathrm{P}=\big(p, f(p)\big)$ における接線の傾きは，p における f の微分係数である．

[定理 **2.6**] 関数 f が定義域の実数 p において微分可能であるとき，p における f の微分係数は f のグラフの点 $\big(p, f(p)\big)$ における接線の傾きである．

関数 f 及び f の定義域の実数 a について，

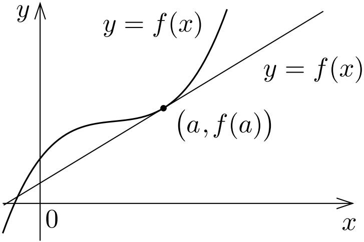
f のグラフの点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ における接線の傾きは f の a における微分係数である．

関数 f 及び f の定義域の実数 a について,

f のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における接線の傾きは f の a における微分係数である. f の a における微分係数は f の導関数の値 $f'(a)$ なので,

f のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における接線の傾きは $f'(a)$

である.



$y = f(x)$ のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における接線

傾きは $f'(a)$

xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+c$ （c は定数）となる；点 (a,b) がこの直線に属すならば，$x=a$ のとき $y=b$ なので，$b=ma+c$ ，$c=b-ma$ ；よって，点 (a,b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+b-ma$ つまり $y=m(x-a)+b$ である．

xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + c$ （c は定数）となる；点 (a,b) がこの直線に属すならば，$x = a$ のとき $y = b$ なので，$b = ma + c$ ，$c = b - ma$ ；よって，点 (a,b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + b - ma$ つまり $y = m(x - a) + b$ である．

関数 f は実数 a において微分可能であるとする．xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの接線を考える．

xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+c$ （c は定数）となる；点 (a,b) がこの直線に属すならば，$x=a$ のとき $y=b$ なので，$b=ma+c$ ，$c=b-ma$ ；よって，点 (a,b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+b-ma$ つまり $y=m(x-a)+b$ である．

関数 f は実数 a において微分可能であるとする．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの接線を考える．$y=f(x)$ のグラフの点 $\bigl(a,f(a)\bigr)$ における接線は，接点 $\bigl(a,f(a)\bigr)$ が属し，傾きは $f'(a)$ である；従ってその方程式は

$y=\qquad(x-\quad)+\qquad$ である．

xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + c$ （ c は定数）となる；点 (a,b) がこの直線に属すならば， $x = a$ のとき $y = b$ なので， $b = ma + c$ ， $c = b - ma$ ；よって，点 (a,b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + b - ma$ つまり $y = m(x - a) + b$ である．

関数 f は実数 a において微分可能であるとする．xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの接線を考える． $y = f(x)$ のグラフの点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ における接線は，接点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ が属し，傾きは $f'(a)$ である；従ってその方程式は $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ である．

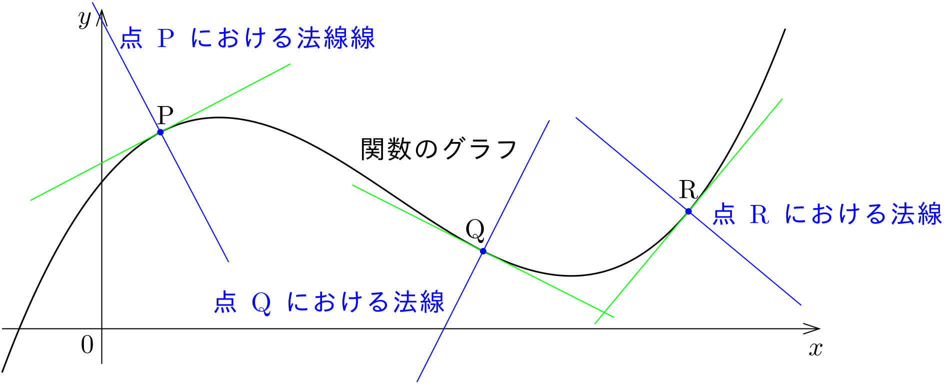
xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+c$ （c は定数）となる；点 (a,b) がこの直線に属するならば， $x=a$ のとき $y=b$ なので， $b=ma+c$ ， $c=b-ma$ ；よって，点 (a,b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+b-ma$ つまり $y=m(x-a)+b$ である．

関数 f は実数 a において微分可能であるとする．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの接線を考える． $y=f(x)$ のグラフの点 $\big(a,f(a)\big)$ における接線は，接点 $\big(a,f(a)\big)$ が属し，傾きは $f'(a)$ である；従ってその方程式は $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ である．

[定理 **4.6.1**]　関数 f が実数 a において微分可能であるとき， f のグラフの点 $\big(a,f(a)\big)$ における接線がある；xy 座標平面においてこの接線を表す方程式は

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)\ .$$

関数 f のグラフの点 P における接線 L があるとき，P が属し L に垂直な接線を，関数 f のグラフの点 P における法線という.



関数 f のグラフの点 P における接線 L があるとき，P が属し L に垂直な接線を，関数 f のグラフの点 P における法線という．

関数 f は実数 a において微分可能であり， $f'(a) \neq 0$ とする．

関数 f のグラフの点 P における接線 L があるとき，P が属し L に垂直な接線を，関数 f のグラフの点 P における法線という.

関数 f は実数 a において微分可能であり，$f'(a) \neq 0$ とする.

f のグラフの点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ における接線の傾きは $f'(a)$ である.

関数 f のグラフの点 P における接線 L があるとき，P が属し L に垂直な接線を，関数 f のグラフの点 P における法線という．

関数 f は実数 a において微分可能であり， $f'(a) \neq 0$ とする．

f のグラフの点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ における接線の傾きは $f'(a)$ である．

f のグラフの点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ における法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(a)}$ である．

傾きが 0 でない実数 m である直線と垂直な直線の傾きは $-\dfrac{1}{m}$ である．

関数 f のグラフの点 P における接線 L があるとき，P が属し L に垂直な接線を，関数 f のグラフの点 P における法線という.

関数 f は実数 a において微分可能であり， $f'(a) \neq 0$ とする.

f のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における接線の傾きは $f'(a)$ である.

f のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(a)}$ である.

f のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における法線に点 $\big(a, f(a)\big)$ が属す.

関数 f のグラフの点 P における接線 L があるとき，P が属し L に垂直な接線を，関数 f のグラフの点 P における法線という．

関数 f は実数 a において微分可能であり， $f'(a) \neq 0$ とする．

f のグラフの点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ における接線の傾きは $f'(a)$ である．

f のグラフの点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ における法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(a)}$ である．

f のグラフの点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ における法線に点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ が属す．

xy 座標平面において $y = f(x)$ のグラフの点 $\bigl(a, f(a)\bigr)$ における法線は方程式 $y = -\dfrac{1}{f'(a)}(x-a) + f(b)$ で表される．

xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + c$ （ c は定数）となる；点 (a,b) がこの直線に属すならば， $x = a$ のとき $y = b$ なので， $b = ma + c$ ， $c = b - ma$ ；よって，点 (a,b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + b - ma$ つまり $y = m(x-a) + b$ である．

関数 f のグラフの点 P における接線 L があるとき，P が属し L に垂直な接線を，関数 f のグラフの点 P における法線という．

関数 f は実数 a において微分可能であり，$f'(a) \neq 0$ とする．

f のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における接線の傾きは $f'(a)$ である．

f のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(a)}$ である．

f のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における法線に点 $\big(a, f(a)\big)$ が属す．

xy 座標平面において $y = f(x)$ のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における法線は方程式 $y = -\dfrac{1}{f'(a)}(x-a) + f(b)$ で表される．

[定理 **4.6.2**]　関数 f が実数 a において微分可能であり $f'(a) \neq 0$ のとき，f のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における法線がある；xy 座標平面においてこの法線を表す方程式は

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a)\ .$$

例　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-4x^2-5x+3$ と定める．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-4x^2-5x+3$ と定める．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める．

$$f(-1)=(-1)^3-4(-1)^2-5(-1)+3=-1-4+5-3=3\ .$$

点 $(-1,3)$ は確かに $y=f(x)$ のグラフに属す．

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-4x^2-5x+3$ と定める．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める．

$$f(-1) = (-1)^3-4(-1)^2-5(-1)+3 = -1-4+5-3 = 3 \ .$$

点 $(-1,3)$ は確かに $y=f(x)$ のグラフに属す．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3-4x^2-5x+3) = 3x^2-8x-5 \ .$$

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-4x^2-5x+3$ と定める. xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における, 接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める.

$$f(-1) = (-1)^3-4(-1)^2-5(-1)+3 = -1-4+5-3 = 3 \ .$$

点 $(-1,3)$ は確かに $y=f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3-4x^2-5x+3) = 3x^2-8x-5 \ .$$

よって

$$f'(-1) = 3(-1)^2-8(-1)-5 = 3+8-5 = 6 \ .$$

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-4x^2-5x+3$ と定める．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める．

$$f(-1)=(-1)^3-4(-1)^2-5(-1)+3=-1-4+5-3=3\ .$$

点 $(-1,3)$ は確かに $y=f(x)$ のグラフに属す．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}(x^3-4x^2-5x+3)=3x^2-8x-5\ .$$

よって

$$f'(-1)=3(-1)^2-8(-1)-5=3+8-5=6\ .$$

$y=f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における接線を表す方程式は $y=6(x+1)+3$，

関数 $y=f(x)$ のグラフの点 $\big(a,f(a)\big)$ における接線を表す方程式は $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-4x^2-5x+3$ と定める．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める．

$$f(-1) = (-1)^3-4(-1)^2-5(-1)+3 = -1-4+5-3 = 3 \ .$$

点 $(-1,3)$ は確かに $y=f(x)$ のグラフに属す．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3-4x^2-5x+3) = 3x^2-8x-5 \ .$$

よって

$$f'(-1) = 3(-1)^2-8(-1)-5 = 3+8-5 = 6 \ .$$

$y=f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における接線を表す方程式は $y=6(x+1)+3$，つまり $y=6x+9$．ここで結果を $y=6(x+1)+3=6x+9$ のように記さないこと．後半の等式 $6(x+1)+3=6x+9$ は方程式でなく恒等式であるから，等式 $y=6(x+1)+3=6x+9$ は方程式とはいいにくい．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における, 接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 \ .$$

点 $(-1,3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 \ .$$

よって

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 8(-1) - 5 = 3 + 8 - 5 = 6 \ .$$

$y = f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における接線を表す方程式は $y = 6(x+1) + 3$, つまり $y = 6x + 9$. $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における法線を表す方程式は $y = -\frac{1}{6}(x+1) + 3$, つまり $y = -\frac{1}{6}x + \frac{17}{6}$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 4.6.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 5x + 7}{2}$ と定める．xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$ における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求めよ．

$f(-2) = \qquad$ ． $f'(x) = \qquad\qquad$ なので $f'(-2) = \qquad$ ． $y = f(x)$ のグラフの点 $\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式は $y = \quad (x \quad) \qquad$ つまり $y = \qquad\qquad$ ． $y = f(x)$ のグラフの点 $\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式は $y = \quad (x \quad) \qquad$ つまり $y = \quad x \qquad$ ．

$\boxed{\text{問}4.6.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2-5x+7}{2}$ と定める．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの点 $\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$ における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求めよ．

$f(-2)=-\dfrac{3}{2}$ ．$f'(x)=\dfrac{3x^2-6x-5}{2}$ なので $f'(-2)=\dfrac{19}{2}$ ．$y=f(x)$ のグラフの点 $\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式は $y=\dfrac{19}{2}(x+2)-\dfrac{3}{2}$ つまり $y=\dfrac{19}{2}x+\dfrac{35}{2}$ ．$y=f(x)$ のグラフの点 $\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式は $y=-\dfrac{2}{19}(x+2)-\dfrac{3}{2}$ つまり $y=-\dfrac{2}{19}x-\dfrac{65}{38}$ ．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める．xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの x 座標が 2 である点における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(-\dfrac{1}{3},\infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\ln(3x+1)$ と定める．xy 座標平面における $y=\psi(x)$ のグラフの x 座標が 2 である点における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める．

$$\psi(2) = \ln(3\cdot 2+1) = \ln 7 \ .$$

接点は $(2,\ln 7)$ ．

$\boxed{\text{例}}$　区間 $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める．xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの x 座標が 2 である点における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める．

$$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7 \ .$$

接点は $(2, \ln 7)$．$t = 3x+1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x+1) = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{3x+1} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$　区間 $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める．xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの x 座標が 2 である点における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める．

$$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7 \ .$$

接点は $(2, \ln 7)$．　$t = 3x+1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x+1) = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{3x+1} \ .$$

よって

$$\psi'(2) = \frac{3}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{7} \ .$$

例　区間 $\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\ln(3x+1)$ と定める．xy 座標平面における $y=\psi(x)$ のグラフの x 座標が 2 である点における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める．

$$\psi(2) = \ln(3\cdot 2+1) = \ln 7 \ .$$

接点は $(2,\ln 7)$ ．$t=3x+1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x+1) = \frac{d}{dt}\ln t\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{3x+1} \ .$$

よって

$$\psi'(2) = \frac{3}{3\cdot 2+1} = \frac{3}{7} \ .$$

点 $(2,\ln 7)$ における $y=\psi(x)$ のグラフの接線を表す方程式は

$y=\frac{3}{7}(x-2)+\ln 7$

関数 $y=\psi(x)$ のグラフの点 $\big(a,\psi(a)\big)$ における接線を表す方程式は

$y=\psi'(a)(x-a)+\psi(a)$

$\boxed{例}$ 区間 $\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\ln(3x+1)$ と定める．xy 座標平面における $y=\psi(x)$ のグラフの x 座標が 2 である点における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める．

$$\psi(2) = \ln(3\cdot 2+1) = \ln 7\ .$$

接点は $(2,\ln 7)$．$t=3x+1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x+1) = \frac{d}{dt}\ln t\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{3x+1}\ .$$

よって

$$\psi'(2) = \frac{3}{3\cdot 2+1} = \frac{3}{7}\ .$$

点 $(2,\ln 7)$ における $y=\psi(x)$ のグラフの接線を表す方程式は

$y=\frac{3}{7}(x-2)+\ln 7$ つまり $y=\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}+\ln 7$．ここで結果を $y=\frac{3}{7}(x-2)+\ln 7=\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}+\ln 7$ のように記さないこと；この等式は方程式とはいいにくい．

例　区間 $\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\ln(3x+1)$ と定める．xy 座標平面における $y=\psi(x)$ のグラフの x 座標が 2 である点における，接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求める．

$$\psi(2)=\ln(3\cdot 2+1)=\ln 7\ .$$

接点は $(2,\ln 7)$ ． $t=3x+1$ とおくと

$$\psi'(x)=\frac{d}{dx}\psi(x)=\frac{d}{dx}\ln(3x+1)=\frac{d}{dt}\ln t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1)=\frac{3}{3x+1}\ .$$

よって

$$\psi'(2)=\frac{3}{3\cdot 2+1}=\frac{3}{7}\ .$$

点 $(2,\ln 7)$ における $y=\psi(x)$ のグラフの接線を表す方程式は $y=\frac{3}{7}(x-2)+\ln 7$ つまり $y=\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}+\ln 7$ ．点 $(2,\ln 7)$ における $y=\psi(x)$ のグラフの法線を表す方程式は $y=-\frac{7}{3}(x-2)+\ln 7$ つまり $y=-\frac{7}{3}x+\frac{14}{3}+\ln 7$ ．

終

$\boxed{\text{問}4.6.2}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=(\ln x)^2$ と定める．xy 座標平面における $y=\varphi(x)$ のグラフの，x 座標が e である点における接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求めよ．

$f(e)=\qquad=\quad$．$\varphi'(x)=\qquad$ なので $\varphi'(e)=\quad$．$y=\varphi(x)$ のグラフの x 座標が e である点における接線を表す方程式は $y=\quad(x\quad)\qquad$ つまり $y=\qquad$．$y=\varphi(x)$ のグラフの x 座標が e である点における法線を表す方程式は $y=\quad(x\quad)\qquad$．

$\boxed{問4.6.2}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=(\ln x)^2$ と定める．xy 座標平面における $y=\varphi(x)$ のグラフの，x 座標が e である点における接線を表す方程式と法線を表す方程式とを求めよ．

$f(e)=(\ln e)^2=1$ ． $\varphi'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$ なので $\varphi'(e)=\dfrac{2}{e}$ ． $y=\varphi(x)$ のグラフの x 座標が e である点における接線を表す方程式は $y=\dfrac{2}{e}(x-e)+1$ つまり $y=\dfrac{2}{e}x-1$ ． $y=\varphi(x)$ のグラフの x 座標が e である点における法線を表す方程式は $y=-\dfrac{e}{2}(x-e)+1$ ． $\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$　xy 座標平面における関数 $y=\cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における関数 $y = \cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める． $x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $y = \left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$ ，従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3}{4}\right)$．

$\boxed{例}$ xy 座標平面における関数 $y=\cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める． $x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $y=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$ ，従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{4}\right)$．また，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos^2 x = -2\sin x\cos x \ .$$

例　xy 座標平面における関数 $y=\cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める．$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $y=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$ ，従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{4}\right)$．また，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos^2 x = -2\sin x\cos x\ .$$

よって，$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = -2\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$　xy 座標平面における関数 $y = \cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める． $x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $y = \left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$ ，従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3}{4}\right)$．また，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos^2 x = -2\sin x\cos x \ .$$

よって， $x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = -2\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

従って $y = \cos^2 x$ のグラフの点 $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3}{4}\right)$ における接線を表す方程式は $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{3}{4}$ ．関数 $y = \psi(x)$ のグラフの点 $(a, \psi(a))$ における接線を表す方程式は $y = \psi'(a)(x - a) + \psi(a)$

例　xy 座標平面における関数 $y=\cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める．$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $y=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$，従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{4}\right)$．また，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos^2 x=-2\sin x\cos x\ .$$

よって，$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}=-2\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

従って $y=\cos^2 x$ のグラフの点 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{4}\right)$ における接線を表す方程式は

$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{3}{4}$ ． 終

$\boxed{問4.6.3}$ xy 座標平面における関数 $y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} =$$

$x = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，

$$y = \qquad\qquad , \qquad \frac{dy}{dx} = \qquad\qquad .$$

$y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$$y = \qquad \Big(x \qquad \Big) + \qquad .$$

$\boxed{問 4.6.3}$ xy 座標平面における関数 $y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5 \cdot \dfrac{d}{dx}(\cos x + 2)}{(\cos x + 2)^2} = \frac{5 \sin x}{(\cos x + 2)^2} \ .$$

$x = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，

$$y = \qquad\qquad , \qquad \frac{dy}{dx} = \qquad\qquad .$$

$y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$y = \qquad \Big(x \qquad \Big) + \qquad$.

$\boxed{\text{問}4.6.3}$ xy 座標平面における関数 $y=\dfrac{5}{\cos x+2}$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めよ．

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{5\cdot\dfrac{d}{dx}(\cos x+2)}{(\cos x+2)^2}=\frac{5\sin x}{(\cos x+2)^2}\ .$$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，

$$y=\frac{5}{\cos\dfrac{\pi}{3}+2}=\frac{5}{\dfrac{1}{2}+2}=2\ ,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{5\sin\dfrac{\pi}{3}}{\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+2\right)^2}=\frac{5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\dfrac{1}{2}+2\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{5}\ .$$

$y=\dfrac{5}{\cos x+2}$ のグラフの x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$y=\qquad\left(x\qquad\right)+\qquad$.

$\boxed{\text{問}4.6.3}$ xy 座標平面における関数 $y=\dfrac{5}{\cos x+2}$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めよ．

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{5\cdot\dfrac{d}{dx}(\cos x+2)}{(\cos x+2)^2}=\frac{5\sin x}{(\cos x+2)^2}\ .$$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，

$$y=\frac{5}{\cos\dfrac{\pi}{3}+2}=\frac{5}{\dfrac{1}{2}+2}=2\ ,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{5\sin\dfrac{\pi}{3}}{\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+2\right)^2}=\frac{5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\dfrac{1}{2}+2\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{5}\ .$$

$y=\dfrac{5}{\cos x+2}$ のグラフの x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$y=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2$ ．

$\boxed{\text{終}}$