4.5 関数の連続性

関数 f の定義域の実数 a について，$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ であるとき，a において f は連続であるという.

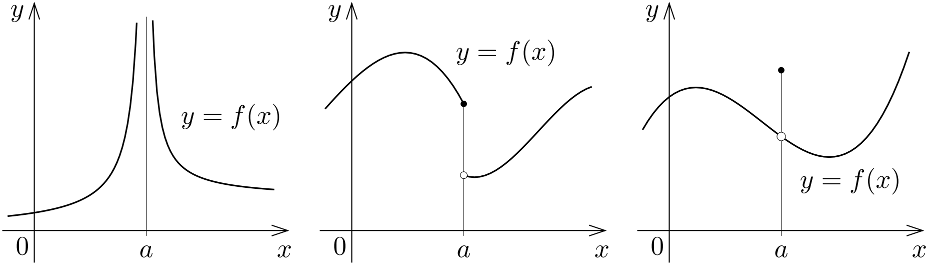
　関数 f の定義域の実数 a について，$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ であるとき，a において f は連続であるという．詳しくいうと，a において f が連続であるとは次の 3 条件が成り立つことである：

(1) a が f の定義域に属して（つまり a に対する f の値 $f(a)$ があって），

(2) $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束して（つまり極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ があって），

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ．

実数 a において関数 f が連続でない状況は，関数 f のグラフで表現すると，例えば以下のような状況がある.



関数 f が連続であるというのは，f の定義域に属すどの実数においても f が連続であるということである．

関数 f が連続であるというのは，f の定義域に属すどの実数においても f が連続であるということである．

$\boxed{\text{例}}$ 冪関数 x^{-1} つまり $\dfrac{1}{x}$ は 0 において連続ではないが 0 以外の実数において連続である．0 は関数 $\dfrac{1}{x}$ の定義域に属さないので，関数 $\dfrac{1}{x}$ は，0 において連続でなくても，関数として連続である． $\boxed{\text{終}}$

関数 f が連続であるというのは，f の定義域に属すどの実数においても f が連続であるということである．

$\boxed{\text{例}}$ 冪関数 x^{-1} つまり $\dfrac{1}{x}$ は 0 において連続ではないが 0 以外の実数において連続である．0 は関数 $\dfrac{1}{x}$ の定義域に属さないので，関数 $\dfrac{1}{x}$ は，0 において連続でなくても，関数として連続である．$\boxed{\text{終}}$

冪関数, 指数関数, 対数関数, 三角関数, 逆三角関数は総て連続である.

例 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-7)}{2x-14} & (\ x \neq 7\ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{2} & (\ x = 7\ \text{のとき}) \end{cases}.$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-7)}{2x-14} & (\ x \neq 7\ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{2} & (\ x = 7\ \text{のとき}) \end{cases}.$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる．関数 f が 7 において連続であるとは，$\displaystyle\lim_{x\to 7} f(x) = f(7)$ であることである．この等式が成り立つかどうか調べる．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-7)}{2x-14} & (\ x \neq 7 \ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{2} & (\ x = 7 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる．変数 y を $y = x - 7$ とおく． $2x - 14 = 2y$ ． $x \neq 7$ のとき，

$$f(x) = \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2}\frac{\sin y}{y} .$$

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-7)}{2x-14} & (\ x \neq 7\ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{2} & (\ x = 7\ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる．変数 y を $y = x - 7$ とおく．$2x - 14 = 2y$ ．$x \neq 7$ のとき，

$$f(x) = \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2}\frac{\sin y}{y} .$$

$x \to 7$ のとき $y = x - 7 \to 0$ なので，

$$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7}\frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin y}{y}\right) = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-7)}{2x-14} & (\ x \neq 7 \ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{2} & (\ x = 7 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる．変数 y を $y = x - 7$ とおく． $2x - 14 = 2y$ ． $x \neq 7$ のとき，

$$f(x) = \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2}\frac{\sin y}{y} .$$

$x \to 7$ のとき $y = x - 7 \to 0$ なので，

$$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7}\frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin y}{y}\right) = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} .$$

また， $x = 7$ のとき $f(x) = \dfrac{1}{2}$ なので， $f(7) = \dfrac{1}{2}$ ．

例 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-7)}{2x-14} & (\ x \neq 7\ \text{のとき}) \\ \dfrac{1}{2} & (\ x = 7\ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる．変数 y を $y = x - 7$ とおく． $2x - 14 = 2y$ ． $x \neq 7$ のとき，

$$f(x) = \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2}\frac{\sin y}{y} .$$

$x \to 7$ のとき $y = x - 7 \to 0$ なので，

$$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7}\frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin y}{y}\right) = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} .$$

また， $x = 7$ のとき $f(x) = \dfrac{1}{2}$ なので， $f(7) = \dfrac{1}{2}$ ． $\displaystyle\lim_{x\to 7} f(x) = f(7)$ なので，関数 f は 7 において連続である． 終

問4.5.1 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-3}\sin(2x-6) & (\ x\neq 3\ \text{のとき}) \\ 5 & (\ x=3\ \text{のとき})\end{cases}.$$

この関数 g は 3 において連続であるかどうか調べよ．

変数 y を $y=$ 　　　　とおく．$x-3=$ 　．$x\to 3$ のとき $y\to$ 　なので，

$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\left\{\frac{5}{x-3}\sin(2x-6)\right\}=\lim_{y\to}\left(\frac{5}{\quad}\sin y\right)=\quad\lim_{y\to}\frac{\sin y}{y}=$$

$g(3)=$ 　なので，$\displaystyle\lim_{x\to 3} g(x)$ 　$g(3)$ ．故に関数 g は 3 において連続で

$\boxed{問4.5.1}$ 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x-3}\sin(2x-6) & (\ x \neq 3 \text{ のとき}) \\ 5 & (\ x = 3 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 g は 3 において連続であるかどうか調べよ．

変数 y を $y = 2x - 6$ とおく． $x - 3 = \dfrac{y}{2}$ ． $x \to 3$ のとき $y \to 0$ なので，

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3}\left\{\frac{5}{x-3}\sin(2x-6)\right\} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{5}{\frac{y}{2}}\sin y\right) = 10\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 10\cdot 1$$
$$= 10 .$$

$g(3) = 5$ なので， $\lim_{x\to 3} g(x) \neq g(3)$ ．故に関数 g は 3 において連続でない．

$\boxed{終}$

例 区間 $(-1,\infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}} & (\ x \neq 0 \ \text{のとき}) \\ 2e & (\ x = 0 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}} & (\ x \neq 0 \ \text{のとき}) \\ 2e & (\ x = 0 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる．関数 φ が 0 において連続であるとは，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \varphi(x) = \varphi(0)$ であることである．この等式が成り立つかどうか調べる．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $(-1,\infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{2}{x}} & (\ x\neq 0\ \text{のとき}) \\ 2e & (\ x=0\ \text{のとき})\end{cases}\ .$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる． $x\neq 0$ のとき，

$$\varphi(x)=(1+x)^{\frac{2}{x}}=(1+x)^{\frac{1}{x}2}=\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2\ .$$

例 区間 $(-1,\infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}} & (\ x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2e & (\ x = 0 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる．$x \neq 0$ のとき，

$$\varphi(x) = (1+x)^{\frac{2}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x}2} = \left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2 .$$

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ なので，

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2 = \left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2 = e^2 .$$

$\boxed{例}$ 区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}} & (\ x \neq 0 \ \text{のとき}) \\ 2e & (\ x = 0 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる． $x \neq 0$ のとき，

$$\varphi(x) = (1+x)^{\frac{2}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x}2} = \left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2 .$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ なので，

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2 = \left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2 = e^2 .$$

また， $x = 0$ のとき $\varphi(x) = 2e$ なので， $\varphi(0) = 2e$ ．

例　区間 $(-1,\infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{2}{x}} & (\ x\neq 0\ \text{のとき}) \\ 2e & (\ x=0\ \text{のとき})\end{cases}.$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる．$x\neq 0$ のとき，

$$\varphi(x)=(1+x)^{\frac{2}{x}}=(1+x)^{\frac{1}{x}2}=\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2.$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ なので，

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2=\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2=e^2.$$

また，$x=0$ のとき $\varphi(x)=2e$ なので，$\varphi(0)=2e$．従って $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi(x)\neq\varphi(0)$．
故に関数 φ は 0 において連続でない．　終

$\boxed{問4.5.2}$ 区間 $(-1,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{3}{x}} & (\ x \neq 0 \ \text{のとき}) \\ e^3 & (\ x = 0 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 ψ は 0 において連続であるかどうか調べよ.

$x \neq 0$ のとき,

$$\psi(x) = (1+x)^{\frac{3}{x}} =$$

従って

$$\lim_{x\to 0} \psi(x) =$$

$\varphi(0) =$ 　　なので, $\lim_{x\to 0} \varphi(x)$ 　　$\varphi(0)$ ．故に関数 φ は 0 において連続で

$\boxed{\text{問}4.5.2}$ 区間 $(-1,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{3}{x}} & (\ x \neq 0 \ \text{のとき}) \\ e^3 & (\ x = 0 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 ψ は 0 において連続であるかどうか調べよ．

　$x \neq 0$ のとき，

$$\psi(x) = (1+x)^{\frac{3}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x}3} = \left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^3 .$$

従って

$$\lim_{x\to 0}\psi(x) = \lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^3 = \left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^3 = e^3 .$$

$\varphi(0) = e^3$ なので， $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \varphi(0)$ ．故に関数 φ は 0 において連続である．

$\boxed{\text{終}}$

連続な **2** つの関数の和・差・積などはやはり連続である.

[定理 4.5.1] 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは実数 a において連続であるとする．このとき，関数 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$ も実数 a において連続である．更に，$g(a)\neq 0$ ならば，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も実数 a において連続である.

連続な **2** つの関数の和・差・積などはやはり連続である.

[定理 4.5.1] 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは実数 a において連続であるとする．このとき，関数 $f(x)+g(x)$ ，$f(x)-g(x)$ ，$f(x)g(x)$ も実数 a において連続である．更に， $g(a) \neq 0$ ならば，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も実数 a において連続である.

連続関数と連続関数との合成関数はやはり連続である.

[定理 4.5.2] 関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(x)$ の定義域に含まれるとする．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが連続であるならば，$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ も連続である.