

## 4.3 代数的な関数の極限

[定義] 変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x > K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があり、

$f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を限りなく大きくしていくと

$f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づく

とき、 $x$  の値を限りなく大きくすると  $f(x)$  は  $c$  に収束する、または、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといひ、 $c$  を  $f(x)$  の極限（値）という。

$x \rightarrow \infty$  のときの  $f(x)$  の極限値を  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c .$$

関数  $f$  について、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  がどんな実数にも収束しないとき、 $f(x)$  は発散するという。

[定義] 変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x > K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があるとする. 変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、変数  $x$  の値を限りなく大きくしていくと  $f(x)$  の値も限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  は  $\infty$  に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

と書き表す. 変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、変数  $x$  の値を限りなく大きくしていくと、 $f(x) < 0$  でその絶対値  $|f(x)|$  が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  は  $-\infty$  に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す.

[定義] 変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x < K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があり、

$f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  について  $x \rightarrow -\infty$  とすると

$f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づく

とき、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといい、 $c$  を  $f(x)$  の極限 (値)

という。  $x \rightarrow -\infty$  のときの  $f(x)$  の極限値を  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c .$$

関数  $f$  について、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $f(x)$  がどんな実数にも収束しないとき、 $f(x)$  は発散するという。

[定義] 変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x < K$  である  $f$  の定義域の実数  $x$  があるとする. 変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、 $x \rightarrow -\infty$  とすると  $f(x)$  の値が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $f(x)$  は  $\infty$  に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す. 変数  $x$  の関数  $f(x)$  について、 $x \rightarrow -\infty$  とすると  $f(x) < 0$  でその絶対値  $|f(x)|$  が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $f(x)$  は  $-\infty$  に発散するといひ、

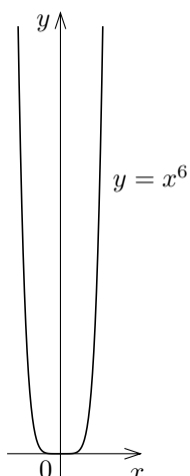
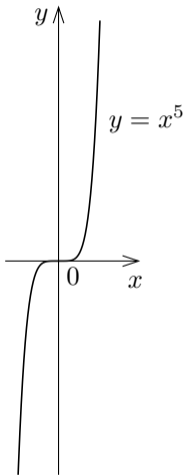
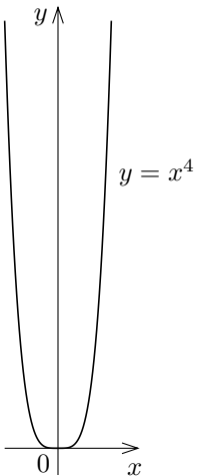
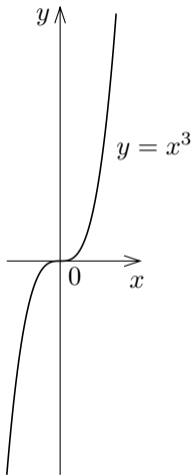
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

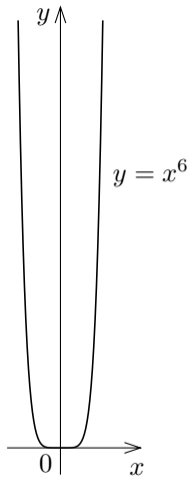
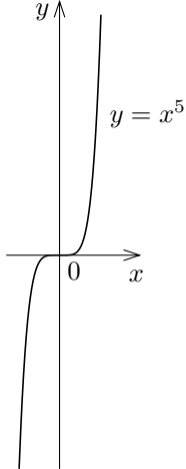
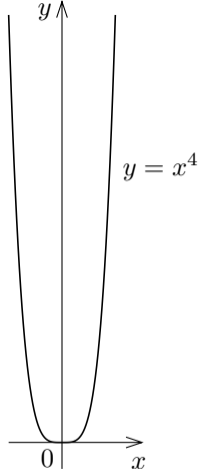
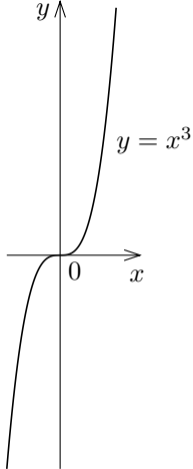
と書き表す.

関数の極限について次のように分類される：

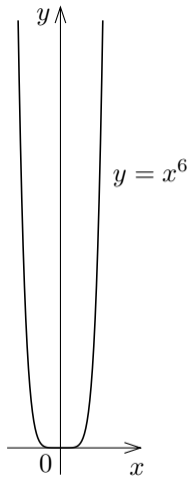
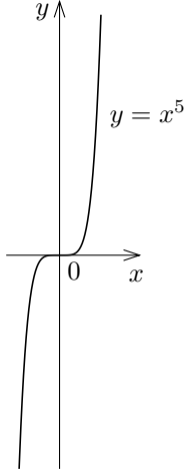
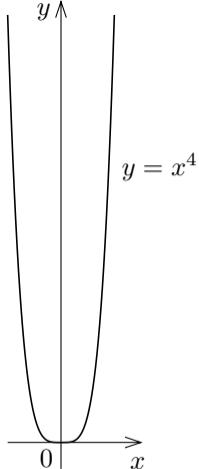
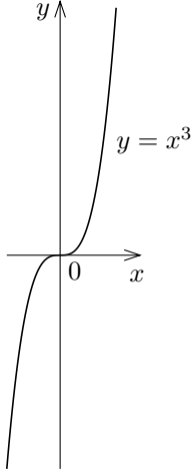
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{収束する} = \text{唯一つの実数に限りなく近づく} = \text{極限值がある} \\ \text{収束しない} = \text{極限值が無い} = \text{発散する} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \infty \text{ に発散する} \\ -\infty \text{ に発散する} \\ \text{それ以外} \end{array} \right. .$$

定数  $n$  は正の自然数とする.  $xy$  座標平面において冪関数  $y = x^n$  のグラフは次のようになる.





これらのグラフより  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$  .



これらのグラフより,  $n$  が奇数のとき  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ ,  $n$  が偶数のとき  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \infty$ .

[定理 4.3] 定数  $n$  は正の自然数とする.  $n$  を指数とする冪関数  $x^n$  について,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \infty & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} .$$

[定理 4.3] 定数  $n$  は正の自然数とする.  $n$  を指数とする冪関数  $x^n$  について,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \infty & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}.$$

この定理より更に, 定数  $k$  及び正の自然数を表す定数  $n$  について,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0.$$

変数  $x$  の関数  $f(x)$  の値が  $x$  の整式で表されるとき  $f(x)$  を有理整関数という。つまり，定数関数，1次関数，2次関数，3次関数，などを併せて有理整関数という。

変数  $x$  の関数  $f(x)$  の値が  $x$  の整式で表されるとき  $f(x)$  を有理整関数という。つまり、定数関数、1次関数、2次関数、3次関数、などを併せて有理整関数という。

$x \rightarrow \pm\infty$  のときの有理整関数  $f(x)$  の極限を求めるためには、 $f(x)$  を表す整式において最高次の  $x$  の冪を括り出す。

例 変数  $x$  の関数  $3x^2 - 7x + 4$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

**例** 変数  $x$  の関数  $3x^2 - 7x + 4$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.  $x$  の2次式  $3x^2 - 7x + 4$  において最高次の  $x$  の冪  $x^2$  を括り出す:

$$3x^2 - 7x + 4 = x^2 \left( \frac{3x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) = x^2 \left( 3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right).$$

**例** 変数  $x$  の関数  $3x^2 - 7x + 4$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.  $x$  の2次式  $3x^2 - 7x + 4$  において最高次の  $x$  の冪  $x^2$  を括り出す:

$$3x^2 - 7x + 4 = x^2 \left( \frac{3x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) = x^2 \left( 3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right).$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 3 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 3 - 0 + 0 = 3.$$

例 変数  $x$  の関数  $3x^2 - 7x + 4$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.  $x$

の 2 次式  $3x^2 - 7x + 4$  において最高次の  $x$  の冪  $x^2$  を括り出す:

$$3x^2 - 7x + 4 = x^2 \left( \frac{3x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) = x^2 \left( 3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right).$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 3 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 3 - 0 + 0 = 3.$$

更に  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 7x + 4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \left( 3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \right\} = \infty.$$

例 変数  $x$  の関数  $3x^2 - 7x + 4$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.  $x$

の 2 次式  $3x^2 - 7x + 4$  において最高次の  $x$  の冪  $x^2$  を括り出す:

$$3x^2 - 7x + 4 = x^2 \left( \frac{3x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) = x^2 \left( 3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right).$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 3 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 3 - 0 + 0 = 3.$$

更に  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 7x + 4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \left( 3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \right\} = \infty.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$  は発散しているので  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \left( 3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \right\}$  を

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right)$  に変形しないこと.

終

例 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$  について  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

例 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$  について  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる． $x$  の 3 次式  $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$  において最高次の  $x$  の冪  $x^3$  を括り出す：

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5} = \frac{x^3}{5} \left( \frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{4}{x^3} \right) = \frac{x^3}{5} \left( 2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) .$$

例 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$  について  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる。 $x$  の 3 次式  $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$  において最高次の  $x$  の冪  $x^3$  を括り出す：

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5} = \frac{x^3}{5} \left( \frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{4}{x^3} \right) = \frac{x^3}{5} \left( 2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) .$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$  ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$  ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^3} = 0$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) = 2 - 0 - 0 + 0 = 2 ;$$

例 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$  について  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べ

る.  $x$  の 3 次式  $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$  において最高次の  $x$  の冪  $x^3$  を括り出す:

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5} = \frac{x^3}{5} \left( \frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{4}{x^3} \right) = \frac{x^3}{5} \left( 2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right).$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^3} = 0$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) = 2 - 0 - 0 + 0 = 2;$$

更に  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{5} = -\infty$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \frac{x^3}{5} \left( 2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) \right\} = -\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{5} = \infty$  は発散しているので  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \frac{x^3}{5} \left( 2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) \right\}$  を

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right)$  に変形しないこと.

□終

問4.3.1 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^2 - 4x + 5}{3}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{2x^2 - 4x + 5}{3} = \frac{x^2}{3} \left( \quad \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3} = \quad, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \quad \right) = \quad = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 5}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x^2}{3} \left( \quad \right) \right\} = \quad .$$

問4.3.1 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^2 - 4x + 5}{3}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{2x^2 - 4x + 5}{3} = \frac{x^2}{3} \left( 2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right) = 2 - 0 + 0 = 2 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 5}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x^2}{3} \left( 2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right) \right\} = \infty.$$

終

**問4.3.2** 変数  $x$  の関数  $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5$  について  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5 = x^3 \left( \quad \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = \quad, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \quad \right) = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ x^3 \left( \quad \right) \right\} = \quad .$$

**問4.3.2** 変数  $x$  の関数  $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5$  について  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5 = x^3 \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3} \right) = \frac{3}{2} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ x^3 \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3} \right) \right\} = -\infty.$$

**終**

次数が 1 以上である有理整関数  $f(x)$  について,  $x \rightarrow \infty$  のとき及び  $x \rightarrow -\infty$  のとき,  $f(x)$  は  $\infty$  か  $-\infty$  かのどちらかに発散する.

変数  $x$  の関数  $f(x)$  の値が分母分子共に  $x$  の整式である分数で表されるとき  $f(x)$  を有理関数という.

変数  $x$  の関数  $f(x)$  の値が分母分子共に  $x$  の整式である分数で表されるとき  $f(x)$  を有理関数という.

変数  $x$  の整式  $P(x)$  と  $Q(x)$  に対して, 分数  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  で表される有理関数の  $x \rightarrow \pm\infty$  のときの極限を求めるためには, 分子  $P(x)$  及び分母  $Q(x)$  の各々において最高次の  $x$  の冪を括り出す.

例 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4}$  について  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

例 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4}$  について  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる。  
分子と分母とにおいて  $x^2$  を括り出す：

$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4} = \frac{x^2 \left( 2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left( 3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}} .$$

例 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4}$  について  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる.

分子と分母とにおいて  $x^2$  を括り出す:

$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4} = \frac{x^2 \left( 2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left( 3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}}.$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{3 - 0 - 0} = \frac{2}{3}.$$

終

例 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

例 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる．分子において  $x^2$  を括り出し，分母において  $x^3$  を括り出す：

$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2} = \frac{x^2 \left( 2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^3 \left( 3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}} .$$

例 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる。分子において  $x^2$  を括り出し、分母において  $x^3$  を括り出す：

$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2} = \frac{x^2 \left( 2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^3 \left( 3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}} .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{2 - 0 + 0}{3 - 0 - 0 + 0} = \frac{2}{3} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}} \right) = 0 \cdot \frac{2}{3} = 0 . \quad \boxed{\text{終}}$$

例 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

例 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べ

る. 分子において  $x^3$  を括り出し, 分母において  $x^2$  を括り出す:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2} = \frac{x^3 \left( 2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)}{x^2 \left( 3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = x \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} .$$

**例** 変数  $x$  の関数  $\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる．分子において  $x^3$  を括り出し，分母において  $x^2$  を括り出す：

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2} = \frac{x^3 \left( 2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)}{x^2 \left( 3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = x \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{2 - 0 - 0 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{2}{3} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) = \infty .$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$  は発散しているので  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)$  を

$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}}$  に変形しないこと.

終

**問4.3.3** 変数  $x$  の関数  $\frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3}$  について  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3} = \frac{\left( \quad \right)}{\left( \quad \right)} = \cdot \underline{\hspace{2cm}} \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \quad = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{\hspace{2cm}} = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \cdot \underline{\hspace{2cm}} \right) =$$

**問4.3.3** 変数  $x$  の関数  $\frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3}$  について  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3} = \frac{x^2 \left( 3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} \right)}{x^3 \left( 2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3} \right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}} .$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$  ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}} = \frac{3}{2}$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}} \right) = 0 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

**問4.3.3** 変数  $x$  の関数  $\frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3}$  について  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3} = \frac{x^2 \left( 3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} \right)}{x^3 \left( 2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3} \right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}} .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}} = \frac{3}{2} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}} \right) = 0 .$$

終

**問4.3.4** 変数  $x$  の関数  $\frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4} = \frac{\left( \quad \right)}{\left( \quad \right)} = \cdot \underline{\hspace{2cm}} \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \quad = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \underline{\hspace{2cm}} = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \quad \cdot \underline{\hspace{2cm}} \quad \right) =$$

**問4.3.4** 変数  $x$  の関数  $\frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4} = \frac{x^4 \left(1 - \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^4}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)} = x^2 \cdot \frac{1 - \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^4}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} =$  ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{—————} =$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cdot \text{—————} \right) =$$

**問4.3.4** 変数  $x$  の関数  $\frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4} = \frac{x^4 \left(1 - \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^4}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)} = x^2 \cdot \frac{1 - \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^4}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^4}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^2 \cdot \frac{1 - \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^4}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} \right) = \infty .$$

終

**問4.3.5** 変数  $x$  の関数  $\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \frac{\left( \quad \right)}{\left( \quad \right)} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underline{\hspace{2cm}} =$$

**問4.3.5** 変数  $x$  の関数  $\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \frac{x^2\left(\frac{5}{x^2}-3\right)}{x^2\left(2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{\frac{5}{x^2}-3}{2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x^2}-3}{2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} =$$

**問4.3.5** 変数  $x$  の関数  $\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$$\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \frac{x^2\left(\frac{5}{x^2}-3\right)}{x^2\left(2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{\frac{5}{x^2}-3}{2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x^2}-3}{2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = -\frac{3}{2}.$$

終

例 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

例 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.  
 $x \rightarrow \infty$  のときを考えるので,  $x > 0$  とする.

例 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

$x \rightarrow \infty$  のときを考えるので,  $x > 0$  とする.

$$\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2} = \frac{\sqrt{x\left(7+\frac{5}{x}\right)}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot \frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}}.$$

例 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

$x \rightarrow \infty$  のときを考えるので,  $x > 0$  とする.

$$\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2} = \frac{\sqrt{x\left(7+\frac{5}{x}\right)}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot \frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{1}{2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}} \right) = 0 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = 0.$$

終

問4.3.6 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ。

$x \rightarrow \infty$  のときを考えるので、 $x > 0$  とする。

$$\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3} = \frac{\sqrt{x(\quad)}}{x(\quad)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{\quad}}{x(\quad)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot \frac{\sqrt{\quad}}{\quad} = \frac{\sqrt{\quad}}{\quad}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \quad = \quad, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\quad}}{\quad} = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{\quad}}{\quad} \right) = \quad \cdot \quad =$$

問4.3.6 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$x \rightarrow \infty$  のときを考えるので,  $x > 0$  とする.

$$\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3} = \frac{\sqrt{x\left(8+\frac{7}{x}\right)}}{x\left(5+\frac{3}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{x\left(5+\frac{3}{x}\right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot \frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\quad}}{\quad} = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{\quad}}{\quad} \right) = \cdot =$$

問4.3.6 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

$x \rightarrow \infty$  のときを考えるので,  $x > 0$  とする.

$$\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3} = \frac{\sqrt{x\left(8+\frac{7}{x}\right)}}{x\left(5+\frac{3}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{x\left(5+\frac{3}{x}\right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot \frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{1}{2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{8}}{5} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{8x+7}}{5x+7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}} \right) = 0 \cdot \frac{\sqrt{8}}{5} = 0.$$

終

例 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

例 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

$x \rightarrow \infty$  のときを考えるので,  $x > 0$  とする.  $\sqrt{x^2} = x$ .

例 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

$x \rightarrow \infty$  のときを考えるので,  $x > 0$  とする.  $\sqrt{x^2} = x$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3} &= \frac{\sqrt{x^2 \left(5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}}{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{x \sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}}. \end{aligned}$$

例 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる.

$x \rightarrow \infty$  のときを考えるので,  $x > 0$  とする.  $\sqrt{x^2} = x$ .

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3} &= \frac{\sqrt{x^2 \left(5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}}{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{x \sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}}.\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

終

問4.3.6 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$x \rightarrow \infty$  のときを考えるので,  $x > 0$  とする.  $\sqrt{x^2} = x$ .

$$\frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5} = \frac{\sqrt{x^2 \left( \quad \right)}}{x \left( \quad \right)} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{\quad}}{x \left( \quad \right)} = \frac{x \sqrt{\quad}}{x \left( \quad \right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\quad}}{\quad} .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\quad}}{\quad} = \underline{\quad} =$$

問4.3.6 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$x \rightarrow \infty$  のときを考えるので,  $x > 0$  とする.  $\sqrt{x^2} = x$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5} &= \frac{\sqrt{x^2 \left(9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}}{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)} = \frac{x \sqrt{9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}}}{4 + \frac{5}{x}}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\quad}}{\quad} = \quad =$$

問4.3.6 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5}$  について  $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べよ.

$x \rightarrow \infty$  のときを考えるので,  $x > 0$  とする.  $\sqrt{x^2} = x$ .

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5} &= \frac{\sqrt{x^2 \left(9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}}{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)} = \frac{x \sqrt{9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}}}{4 + \frac{5}{x}}.\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}}}{4 + \frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{9}}{4} = \frac{3}{4}.$$

終