4.2 関数の極限の性質

[定義] 変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，x の値を限りなく大きくすると $f(x)$ は c に収束する，または，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という.
$x \to \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x\to\infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \ .$$

関数 f について，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき，$f(x)$ は発散するという.

[定義] 変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があるとする．変数 x の関数 $f(x)$ について，変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといい，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

と書き表す．変数 x の関数 $f(x)$ について，変数 x の値を限りなく大きくしていくと，$f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は $-\infty$ に発散するといい，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す．

[定義] 変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x について $x \to -\infty$ とすると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．$x \to -\infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c \ .$$

関数 f について，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき，$f(x)$ は発散するという．

[定義] 変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があるとする．変数 x の関数 $f(x)$ について，$x \to -\infty$ とすると $f(x)$ の値が限りなく大きくなるとき，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといい，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す．変数 x の関数 $f(x)$ について，$x \to -\infty$ とすると $f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は $-\infty$ に発散するといい，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す．

関数の極限について次のように分類される：

$$\begin{cases} \text{収束する} = \text{唯一つの実数に限りなく近づく} = \text{極限値がある} \\ \text{収束しない} = \text{極限値が無い} = \text{発散する} \begin{cases} \infty \text{ に発散する} \\ -\infty \text{ に発散する} \\ \text{それ以外} \end{cases} \end{cases}.$$

[定理 **2.3.1**] 定数 a は実数とする．変数 x について $x \to a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば,

$$\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} \pm \left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \quad \text{（複号同順）},$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\,g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \ ;$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \ .$$

[定理 **2.3.1**]　定数 a は実数とする．変数 x について $x \to a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} \pm \left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \quad （複号同順）\ ,$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\,g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\}\ ;$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば，

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\ .$$

　この定理において定数 a は正の無限大 ∞ 或いは負の無限大 $-\infty$ であってもよい．

[定理 4.2.1]　定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x について $x \to a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} \pm \left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \quad \text{（複号同順）},$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\,g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \ ;$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)} \ .$$

[定理 4.2.1]　定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x について $x \to a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} \pm \left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \quad \text{（複号同順）},$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\,g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \;;$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \ .$$

次のことがいえる：変数 x と無関係な定数 k について，$\lim\limits_{x\to\infty} k = k$ なので，関数 $f(x)$ について $x \to \infty$ のとき $f(x)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x) + k\} = \left\{\lim_{x\to\infty} f(x)\right\} + \lim_{x\to\infty} k = \left\{\lim_{x\to\infty} f(x)\right\} + k \ ,$$

$$\lim_{x\to\infty}\{k f(x)\} = \left(\lim_{x\to\infty} k\right)\lim_{x\to\infty} f(x) = k\lim_{x\to\infty} f(x) \ .$$

[定理 **2.3.2**]　関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるとする．定数 a は実数とする．変数 x について $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば，

$$\lim_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) .$$

　この定理において定数 a は正の無限大 ∞ 或いは負の無限大 $-\infty$ であってもよい．

[定理 **4.2.2**]　関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるとする．定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x について $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば，

$$\lim_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) .$$

[定理 **2.3.3**]　定数 a と b とは実数とする．変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて， $f(x)=g(y)$ で，変数 x について $x\to a$ のとき $y\to b$ ， $y\neq b$ とする． $y\to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{y\to b} g(y) \ .$$

この定理において定数 a または b は正の無限大 ∞ 或いは負の無限大 $-\infty$ であってもよい．

[定理 **4.2.3**]　定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて， $f(x)=g(y)$ で， $x\to a$ のとき $y\to b$ ， $y\neq b$ とする． $y\to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{y\to b} g(y) \ .$$

関数 f について $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ とする． $y = f(x)$ とおくと， $x \to a$ のとき $y \to \infty$ ；よって，定数 k に対して，

$$\lim_{x\to a} \frac{k}{f(x)} = \lim_{y\to\infty} \frac{k}{y} = k \lim_{y\to\infty} y^{-1} = k \cdot 0 = 0 \ .$$

関数 f について $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ とする． $y=f(x)$ とおくと， $x\to a$ のとき $y\to\infty$ ；よって，定数 k に対して，

$$\lim_{x\to a}\frac{k}{f(x)} = \lim_{y\to\infty}\frac{k}{y} = k\lim_{y\to\infty} y^{-1} = k\cdot 0 = 0 \ .$$

関数 f について $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ とする． $y=-f(x)$ とおくと， $f(x)=-y$ ， $x\to a$ のとき $f(x)\to-\infty$ なので $y=-f(x)\to\infty$ ；よって，定数 k に対して，

$$\lim_{x\to a}\frac{k}{f(x)} = \lim_{y\to\infty}\frac{k}{-y} = -k\lim_{y\to\infty} y^{-1} = -k\cdot 0 = 0 \ .$$

$x \to \infty$ のときの極限を調べる.

例　変数 x の関数 $\sqrt{9+\frac{5}{x^2}}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べる．

$\lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x\to\infty} (5x^{-2}) = 0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right) = 9 + \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = 9+0 = 9 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sqrt{9+\dfrac{5}{x^2}}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べる．

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = \lim_{x\to\infty}(5x^{-2}) = 0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right) = 9+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = 9+0 = 9 \ .$$

9 において関数 $\sqrt{x}$ は連続なので，

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{9+\frac{5}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right)}$$

[定理 **4.2.2**] 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるとする．定数 a は実数か ∞ か $-\infty$ とする．変数 x について $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば，

$$\lim_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \ .$$

例　変数 x の関数 $\sqrt{9+\dfrac{5}{x^2}}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べる．

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=\lim_{x\to\infty}(5x^{-2})=0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right) = 9+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = 9+0 = 9 \ .$$

9 において関数 $\sqrt{x}$ は連続なので，

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{9+\frac{5}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right)}=\sqrt{9}=3 \ .$$

終

$\boxed{問4.2.1}$ 変数 x の関数 $\log_3\left(81+\dfrac{7}{\sqrt{x}}\right)$ について， $x\to\infty$ のときの極限を調べよ．

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{7}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(7x^{-\frac{1}{2}}\right)=$ 　　なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)=81+\quad=$$

において関数 $\log_3 x$ は連続なので，

$$\lim_{x\to\infty}\log_3\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)=\log_3\left\{\lim_{x\to\infty}\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)\right\}=$$

$\boxed{問 4.2.1}$ 変数 x の関数 $\log_3\left(81+\dfrac{7}{\sqrt{x}}\right)$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べよ．

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{7}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(7x^{-\frac{1}{2}}\right) = 0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right) = 81+0 = 81 \ .$$

81 において関数 $\log_3 x$ は連続なので，

$$\lim_{x\to\infty}\log_3\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right) = \log_3\left\{\lim_{x\to\infty}\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)\right\} =$$

$\boxed{問4.2.1}$ 変数 x の関数 $\log_3\left(81+\dfrac{7}{\sqrt{x}}\right)$ について, $x\to\infty$ のときの極限を調べよ.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{7}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(7x^{-\frac{1}{2}}\right)=0$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)=81+0=81 \ .$$

81 において関数 $\log_3 x$ は連続なので,

$$\lim_{x\to\infty}\log_3\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)=\log_3\left\{\lim_{x\to\infty}\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)\right\}=\log_3 81=\log_3 3^4$$
$$=4 \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる．変数 y を $y = 2x - 5$ とおく．

例 変数 x の関数 $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる．変数 y を $y = 2x-5$ とおく．$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^{y}$ ．$x \to \infty$ のとき $y = 2x-5 \to \infty$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{y} = \infty \ .$$

[定理 **4.2.3**] 定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて，$f(x) = g(y)$ で，$x \to a$ のとき $y \to b$ ，$y \neq b$ とする．$y \to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{y\to b} g(y)$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる．変数 y を $y = 2x-5$ とおく．$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^{y}$ ．$x \to \infty$ のとき $y = 2x-5 \to \infty$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{y} = \infty \ .$$

$x \to -\infty$ のとき $y = 2x-5 \to -\infty$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{y} = 0 \ .$$

[定理 **4.2.3**] 定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて，$f(x) = g(y)$ で，$x \to a$ のとき $y \to b$ ，$y \neq b$ とする．$y \to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{y\to b} g(y)$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる．変数 y を $y = 2x-5$ とおく．$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^{y}$ ．$x \to \infty$ のとき $y = 2x-5 \to \infty$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{y} = \infty \ .$$

$x \to -\infty$ のとき $y = 2x-5 \to -\infty$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{y} = 0 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 4.2.2}$ 変数 x の関数 $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7}$ について， $x \to \infty$ のときの及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

変数 y を $y = 3x - 7$ とおく． $x \to \infty$ のとき $y \to$ 　　　なので，

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \to \quad} \left(\frac{5}{6}\right)^{y} = \qquad .$$

$x \to -\infty$ のとき $y \to$ 　　　なので，

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \to \quad} \left(\frac{5}{6}\right)^{y} = \qquad .$$

$\boxed{\text{問}4.2.2}$ 変数 x の関数 $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7}$ について，$x \to \infty$ のときの及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

変数 y を $y = 3x - 7$ とおく．$x \to \infty$ のとき $y \to \infty$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{y} = 0 \ .$$

$x \to -\infty$ のとき $y \to -\infty$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y\to-\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{y} = \infty \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問4.2.3}$ 変数 y の関数 $\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y}$ について，$y \to \infty$ のとき及び $y \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

変数 x を $x = 5 - 2y$ とおく．$y \to \infty$ のとき $x \to$ なので，

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x\to}\left(\frac{8}{7}\right)^{x} =$$

$y \to -\infty$ のとき $x \to$ なので，

$$\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x\to}\left(\frac{8}{7}\right)^{x} =$$

$\boxed{\text{問}4.2.3}$ 変数 y の関数 $\left(\dfrac{8}{7}\right)^{5-2y}$ について， $y \to \infty$ のとき及び $y \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

変数 x を $x = 5 - 2y$ とおく． $y \to \infty$ のとき $x \to -\infty$ なので，

$$\lim_{y \to \infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{x} = 0 \ .$$

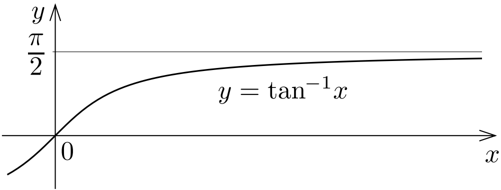
$y \to -\infty$ のとき $x \to \infty$ なので，

$$\lim_{y \to -\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{x} = \infty \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について，$t \to \infty$ のとき及び $t \to -\infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{例}$ 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について，$t \to \infty$ のとき及び $t \to -\infty$ のときの極限を調べる． $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2}$ なので



$\boxed{例}$ 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について，$t \to \infty$ のとき及び $t \to -\infty$ のときの極限を調べる． $\lim\limits_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \dfrac{\pi}{2}$ なので

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3}\lim_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \ .$$

例 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について，$t \to \infty$ のとき及び $t \to -\infty$ のときの極限を調べる． $\lim\limits_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \dfrac{\pi}{2}$ なので

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3} \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \ .$$

$\dfrac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので，

$$\lim_{t\to\infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t\to\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \ .$$

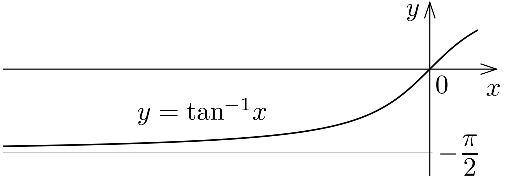
$\boxed{\text{例}}$ 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について，$t\to\infty$ のとき及び $t\to-\infty$ のときの極限を調べる． $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t=\frac{\pi}{2}$ なので

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}=\frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}\ .$$

$\dfrac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので，

$$\lim_{t\to\infty}\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ .$$

$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}t=-\frac{\pi}{2}$ なので



$\boxed{例}$ 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について，$t \to \infty$ のとき及び $t \to -\infty$ のときの極限を調べる． $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t = \frac{\pi}{2}$ なので

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} .$$

$\dfrac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので，

$$\lim_{t\to\infty}\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} .$$

$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}t = -\frac{\pi}{2}$ なので

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3}\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}t = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について，$t\to\infty$ のとき及び $t\to-\infty$ のときの極限を調べる． $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t=\frac{\pi}{2}$ なので

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}=\frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}\ .$$

$\dfrac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので，

$$\lim_{t\to\infty}\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ .$$

$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}t=-\frac{\pi}{2}$ なので

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}=\frac{1}{3}\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}t=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}\ .$$

$-\dfrac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので，

$$\lim_{t\to-\infty}\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\left(\lim_{t\to-\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}4.2.4}$ 変数 y の関数 $\cos\left(\dfrac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$ について, $y\to\infty$ のとき及び $y\to-\infty$ のときの極限を調べよ.

$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\tan^{-1}y =$ 　　なので, $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3} =$ 　　　　　　　　; 　　において余弦関数 $\cos x$ は連続なので,

$$\lim_{y\to\infty}\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y\to\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos \qquad = \qquad .$$

$\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\tan^{-1}y =$ 　　　なので, $\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3} =$ 　　　　　　　　　　　　; 　　　において余弦関数 $\cos x$ は連続なので,

$$\lim_{y\to-\infty}\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y\to-\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\qquad\right) =$$

$\boxed{問4.2.4}$ 変数 y の関数 $\cos\left(\dfrac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$ について，$y\to\infty$ のとき及び $y\to-\infty$ のときの極限を調べよ．

$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\tan^{-1}y=\frac{\pi}{2}$ なので，$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}$ ；$\dfrac{2\pi}{3}$ において余弦関数 $\cos x$ は連続なので，

$$\lim_{y\to\infty}\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\left(\lim_{y\to\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\ .$$

$\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\tan^{-1}y=$ 　　　なので，$\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}=$ 　　　　　　　　　　　　；　　　において余弦関数 $\cos x$ は連続なので，

$$\lim_{y\to-\infty}\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\left(\lim_{y\to-\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\left(\qquad\right)=$$

$\boxed{\text{問}4.2.4}$　変数 y の関数 $\cos\left(\dfrac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$ について，$y\to\infty$ のとき及び $y\to-\infty$ のときの極限を調べよ．

$\lim_{y\to\infty}\tan^{-1}y=\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\lim_{y\to\infty}\dfrac{4\tan^{-1}y}{3}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2\pi}{3}$ ；$\dfrac{2\pi}{3}$ において余弦関数 $\cos x$ は連続なので，

$$\lim_{y\to\infty}\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\left(\lim_{y\to\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\ .$$

$\lim_{y\to-\infty}\tan^{-1}y=-\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\lim_{y\to-\infty}\dfrac{4\tan^{-1}y}{3}=\dfrac{4}{3}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2\pi}{3}$ ；$-\dfrac{2\pi}{3}$ において余弦関数 $\cos x$ は連続なので，

$$\lim_{y\to-\infty}\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\left(\lim_{y\to-\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $x \sin \dfrac{2}{x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $x\sin\dfrac{2}{x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べる．変数 y を $y = \dfrac{2}{x}$ とおく．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $x\sin\dfrac{2}{x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べる．変数 y を $y = \dfrac{2}{x}$ とおく．$x = \dfrac{2}{y}$ なので

$$x\sin\frac{2}{x} = \frac{2}{y}\sin y = 2\cdot\frac{\sin y}{y} .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $x\sin\dfrac{2}{x}$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べる．変数 y を $y=\dfrac{2}{x}$ とおく．$x=\dfrac{2}{y}$ なので

$$x\sin\frac{2}{x} = \frac{2}{y}\sin y = 2\cdot\frac{\sin y}{y} \ .$$

$x\to\infty$ のとき $y=\dfrac{2}{x}\to 0$ ． $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{2}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\left(2\cdot\frac{\sin y}{y}\right)=2\cdot 1=2 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問4.2.5}$ 変数 y の関数 $y\sin\dfrac{3}{2y}$ について，$y \to -\infty$ のときの極限を調べよ.

変数 x を $x = \dfrac{3}{2y}$ とおく. $y =$ なので

$$y\sin\frac{3}{2y} = \quad \sin x = \quad \cdot \frac{\sin x}{x} \ .$$

$y \to -\infty$ のとき $x \to$. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} =$ なので,

$$\lim_{y\to -\infty}\left(y\sin\frac{3}{2y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\quad \cdot \frac{\sin x}{x}\right) =$$

$\boxed{問4.2.5}$ 変数 y の関数 $y\sin\dfrac{3}{2y}$ について，$y\to-\infty$ のときの極限を調べよ．

変数 x を $x=\dfrac{3}{2y}$ とおく．$y=\dfrac{3}{2x}$ なので

$$y\sin\frac{3}{2y} = \frac{3}{2x}\sin x = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sin x}{x} \ .$$

$y\to-\infty$ のとき $x\to 0$ ．$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ なので，

$$\lim_{y\to-\infty}\left(y\sin\frac{3}{2y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2} \ .$$

$\boxed{終}$

[定理 **4.2.1**] 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x について $x \to a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} \pm \left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \quad \text{（複号同順）},$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\,g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \;;$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば，

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \;.$$

定数 a 及び変数 x について $x \to a$ のとき関数 $f(x)$ または $g(x)$ が発散するときはこの定理を使えない．

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて以下のことが一般的にいえる．

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて以下のことが一般的にいえる．

(1) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束するならば，$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\infty$ ．

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて以下のことが一般的にいえる．

(1) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束するならば，$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\infty$ ．

(2) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\lim_{x\to a} g(x)>0$ ならば，$\lim_{x\to a}\{f(x)\,g(x)\}=\infty$ ，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ ．

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて以下のことが一般的にいえる．

(1) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束するならば，$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\infty$ ．

(2) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\lim_{x\to a} g(x)>0$ ならば，$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\infty$ ，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ ．

(3) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\lim_{x\to a} g(x)<0$ ならば，$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=-\infty$ ，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$ ．

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて以下のことが一般的にいえる．

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ で $x \to a$ のとき $g(x)$ が収束するならば，$\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \infty$ ．

(2) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ で $x \to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\lim_{x \to a} g(x) > 0$ ならば，$\lim_{x \to a} \{f(x)\,g(x)\} = \infty$ ，$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ ．

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ で $x \to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\lim_{x \to a} g(x) < 0$ ならば，$\lim_{x \to a} \{f(x)\,g(x)\} = -\infty$ ，$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ ．

(4) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ かつ $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ ならば，$\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \infty$ ，$\lim_{x \to a} \{f(x)\,g(x)\} = \infty$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y の関数 $2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7$ について $y \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y の関数 $2\left(\dfrac{5}{4}\right)^y - 7$ について $y \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\dfrac{5}{4} > 1$ より $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^y = \infty$ なので,

$\boxed{例}$ 変数 y の関数 $2\left(\frac{5}{4}\right)^y-7$ について $y\to\infty$ のときの極限を調べる.

$\frac{5}{4}>1$ より $\lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^y=\infty$ なので, $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\}=\infty$, よって

$$\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y-7\right\}=\infty\ .$$

例　変数 y の関数 $2\left(\frac{5}{4}\right)^{y}-7$ について $y\to\infty$ のときの極限を調べる.

$\frac{5}{4}>1$ より $\lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^{y}=\infty$ なので, $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^{y}\right\}=\infty$, よって

$$\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^{y}-7\right\}=\infty\ .$$

$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^{y}=\infty$ は発散しているので $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^{y}\right\}$ を $2\lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^{y}$ に変形しないこと. $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^{y}\right\}=\infty$ は発散しているので $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^{y}-7\right\}$ を $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^{y}\right\}-7$ に変形しないこと. 終

$\boxed{問4.2.6}$ 変数 u の関数 $5\left(\frac{6}{7}\right)^u+8$ について，$u \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{u\to-\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^u = \qquad \text{なので，} \quad \lim_{u\to-\infty}\left\{5\left(\frac{6}{7}\right)^u+8\right\} = \qquad .$$

$\boxed{問4.2.6}$ 変数 u の関数 $5\left(\frac{6}{7}\right)^u+8$ について，$u \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{u\to-\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^u=\infty \text{ なので，} \lim_{u\to-\infty}\left\{5\left(\frac{6}{7}\right)^u+8\right\}=\infty \text{ ．}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問 4.2.7}$ 変数 y の関数 $\left(\dfrac{5}{y^2}-3\right)\log_2 y$ について，$y \to \infty$ のときの極限を調べよ.

$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{5}{y^2} = \qquad$ なので $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{y^2}-3\right) = \qquad$. $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\log_2 y = \qquad$ なので

$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\left\{\left(\frac{5}{y^2}-3\right)\log_2 y\right\} = \qquad$.

$\boxed{問4.2.7}$ 変数 y の関数 $\left(\dfrac{5}{y^2}-3\right)\log_2 y$ について，$y\to\infty$ のときの極限を調べよ．

$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{5}{y^2}=0$ なので $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{y^2}-3\right)=-3$．$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\log_2 y=\infty$ なので

$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\left\{\left(\frac{5}{y^2}-3\right)\log_2 y\right\}=-\infty$． $\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{7^x+8^x}{9^x}$ について，$x\to\infty$ のとき及び $x\to-\infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{7^x+8^x}{9^x}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x+8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x}+\frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{7^x+8^x}{9^x}$ について, $x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x+8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x}+\frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x \ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x = 0$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x = 0 \ .$$

例　変数 x の関数 $\dfrac{7^x+8^x}{9^x}$ について，$x\to\infty$ のとき及び $x\to-\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x+8^x}{9^x}=\frac{7^x}{9^x}+\frac{8^x}{9^x}=\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x\ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x=0$ ，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x=0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x=0\ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x=\infty$ ，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x=\infty$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x}=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x\right\}=\infty\ .$$

例 変数 x の関数 $\dfrac{7^x+8^x}{9^x}$ について，$x\to\infty$ のとき及び $x\to-\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x+8^x}{9^x}=\frac{7^x}{9^x}+\frac{8^x}{9^x}=\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x=0$ ， $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x=0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x=0 .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x=\infty$ ， $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x=\infty$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x}=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x\right\}=\infty .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x=\infty$ 及び $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x=\infty$ は発散しているので
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x\right\}$ を $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x+\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x$ に変形しないこと. 終

$\boxed{\text{問}4.2.8}$ 変数 x の関数 $\dfrac{4^x+5^x}{6^x}$ について，$x\to\infty$ のとき及び $x\to-\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\frac{4^x+5^x}{6^x} = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \left(\quad\right)^x + \left(\quad\right)^x .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x = \quad$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x = \quad$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(\quad\right)^x + \left(\quad\right)^x\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x + \lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x = \quad .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\quad\right)^x = \quad$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\quad\right)^x = \quad$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x} = \lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\quad\right)^x + \left(\quad\right)^x\right\} = \quad .$$

$\boxed{\text{問}4.2.8}$ 変数 x の関数 $\dfrac{4^x+5^x}{6^x}$ について，$x\to\infty$ のとき及び $x\to-\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\frac{4^x+5^x}{6^x}=\frac{4^x}{6^x}+\frac{5^x}{6^x}=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x .$$

$\lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x=\qquad,\quad \lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x=\qquad$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\quad\right)^x+\left(\quad\right)^x\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x+\lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x=\qquad .$$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\quad\right)^x=\qquad,\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\quad\right)^x=\qquad$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x}=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\quad\right)^x+\left(\quad\right)^x\right\}=\qquad .$$

$\boxed{問 4.2.8}$ 変数 x の関数 $\dfrac{4^x+5^x}{6^x}$ について, $x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{4^x+5^x}{6^x} = \frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x = 0$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\quad\right)^x = \qquad$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\quad\right)^x = \qquad$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x} = \lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\quad\right)^x + \left(\quad\right)^x\right\} = \qquad .$$

$\boxed{問4.2.8}$ 変数 x の関数 $\dfrac{4^x+5^x}{6^x}$ について，$x\to\infty$ のとき及び $x\to-\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\frac{4^x+5^x}{6^x} = \frac{4^x}{6^x}+\frac{5^x}{6^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$ ， $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x = 0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = \infty$ ， $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x = \infty$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x} = \lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x\right\} = \infty .$$

$\boxed{終}$