

## 3.9 第2次導関数

関数  $f$  が微分可能で、更にその導関数  $f'$  が微分可能であるとき、 $f$  は2回微分可能であるという；このとき導関数  $f'$  の導関数を  $f$  の第2次導関数といい、 $f''$  と書き表す。

関数  $f$  が微分可能で、更にその導関数  $f'$  が微分可能であるとき、 $f$  は2回微分可能であるという；このとき導関数  $f'$  の導関数を  $f$  の第2次導関数といい、 $f''$  と書き表す。つまり、 $f$  の第2次導関数の値  $f''(x)$  は、 $f(x)$  を微分した結果  $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$  を更にもう一度微分した結果である：

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} .$$

関数  $f$  が微分可能で、更にその導関数  $f'$  が微分可能であるとき、 $f$  は 2 回微分可能であるという；このとき導関数  $f'$  の導関数を  $f$  の第 2 次導関数といい、 $f''$  と書き表す。つまり、 $f$  の第 2 次導関数の値  $f''(x)$  は、 $f(x)$  を微分した結果  $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$  を更にもう一度微分した結果である：

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} .$$

$f''(x)$  を  $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$  と書き表す。

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} .$$

変数  $x, y$  について  $y = f(x)$  のとき,  $f(x)$  の第 2 次導関数

$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$  を  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $y''$  などとも書き表す;

変数  $x, y$  について  $y = f(x)$  のとき,  $f(x)$  の第 2 次導関数

$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$  を  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $y''$  などとも書き表す;  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  は,  $y$  を微分した結果

$\frac{dy}{dx}$  をもう一度微分した結果である:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) .$$

**例** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$  と定める.  $f$  の第 2 次導関数  $f''$  を求める.

**例** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$  と定める.  $f$  の第 2 次導関数  $f''$  を求める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (x^3 - 4x^2 + 3x - 2) = 3x^2 - 8x + 3 .$$

**例** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$  と定める.  $f$  の第 2 次導関数  $f''$  を求める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (x^3 - 4x^2 + 3x - 2) = 3x^2 - 8x + 3 .$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} (3x^2 - 8x + 3) = 6x - 8 .$$

**終**

**問3.9.1** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2}$  と定める． $f$  の第2次導関数  $f''$  を求めよ．

**問3.9.1** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2}$  と定める． $f$  の第2次導関数  $f''$  を求めよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2} = \frac{3x^2 - 10x + 3}{2} .$$

**問3.9.1** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2}$  と定める． $f$  の第2次導関数  $f''$  を求めよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2} = \frac{3x^2 - 10x + 3}{2} .$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \frac{3x^2 - 10x + 3}{2} = \frac{6x - 10}{2} = 3x - 5 .$$

終

例 変数  $x$  の関数  $y = x^3 \ln x$  の第 2 次導関数  $\frac{d^2y}{dx^2}$  を求める.

例 変数  $x$  の関数  $y = x^3 \ln x$  の第 2 次導関数  $\frac{d^2y}{dx^2}$  を求める.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 \ln x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = x^2(3 \ln x + 1) .$$

例 変数  $x$  の関数  $y = x^3 \ln x$  の第 2 次導関数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  を求める.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 \ln x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = x^2(3 \ln x + 1) .$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \{ x^2(3 \ln x + 1) \} \\ &= \frac{d}{dx} x^2 \cdot (3 \ln x + 1) + x^2 \cdot \frac{d}{dx} (3 \ln x + 1) \\ &= 2x \cdot (3 \ln x + 1) + x^2 \cdot 3 \frac{1}{x} = 2x(3 \ln x + 1) + 3x \\ &= x(6 \ln x + 5) . \end{aligned}$$

終

問3.9.2 変数  $t$  の関数  $x = t^2 e^t$  の第2次導関数  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  を求めよ.

**問3.9.2** 変数  $t$  の関数  $x = t^2 e^t$  の第2次導関数  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  を求めよ.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(t^2 e^t) = \frac{d}{dt}t^2 \cdot e^t + t^2 \frac{d}{dt}e^t = 2te^t + t^2 e^t \\ &= e^t(t^2 + 2t) .\end{aligned}$$

問3.9.2 変数  $t$  の関数  $x = t^2 e^t$  の第2次導関数  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  を求めよ.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(t^2 e^t) = \frac{d}{dt} t^2 \cdot e^t + t^2 \frac{d}{dt} e^t = 2te^t + t^2 e^t \\ &= e^t(t^2 + 2t) .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \{e^t(t^2 + 2t)\} = \frac{d}{dt} e^t \cdot (t^2 + 2t) + e^t \frac{d}{dt} (t^2 + 2t) \\ &= e^t(t^2 + 2t) + e^t(2t + 2) \\ &= e^t(t^2 + 4t + 2) .\end{aligned}$$

終

例 変数  $t$  の関数  $x = \sin 3t$  の第 2 次導関数  $\frac{d^2x}{dt^2}$  を求める.

例 変数  $t$  の関数  $x = \sin 3t$  の第 2 次導関数  $\frac{d^2x}{dt^2}$  を求める.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \sin 3t = \cos 3t \cdot \frac{d}{dt}(3t) = 3 \cos 3t .$$

例 変数  $t$  の関数  $x = \sin 3t$  の第 2 次導関数  $\frac{d^2x}{dt^2}$  を求める.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \sin 3t = \cos 3t \cdot \frac{d}{dt}(3t) = 3 \cos 3t .$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (3 \cos 3t) = 3(-\sin 3t) \frac{d}{dt}(3t) = -9 \sin 3t .$$

終

**問3.9.3** 実数全体を定義域とする関数  $g$  を  $g(x) = \cos(2x + 3)$  と定める.  $g$  の第2次導関数  $g''$  を求めよ.

**問3.9.3** 実数全体を定義域とする関数  $g$  を  $g(x) = \cos(2x + 3)$  と定める.  $g$  の第2次導関数  $g''$  を求めよ.

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{d}{dx} \cos(2x + 3) = -\sin(2x + 3) \cdot \frac{d}{dx}(2x + 3) \\ &= -2 \sin(2x + 3) .\end{aligned}$$

**問3.9.3** 実数全体を定義域とする関数  $g$  を  $g(x) = \cos(2x + 3)$  と定める.  $g$  の第2次導関数  $g''$  を求めよ.

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{d}{dx} \cos(2x + 3) = -\sin(2x + 3) \cdot \frac{d}{dx}(2x + 3) \\ &= -2 \sin(2x + 3) .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g''(x) &= \frac{d}{dx} \{-2 \sin(2x + 3)\} = -2 \cos(2x + 3) \cdot \frac{d}{dx}(2x + 3) \\ &= -4 \cos(2x + 3) .\end{aligned}$$

終