

3.7 逆三角関数の導関数

逆三角関数について以下の性質が成り立つ.

各実数 x について, $\tan x$ の値があり,

$$\tan(\tan^{-1}x) = x .$$

$-1 \leq x \leq 1$ である各実数 x について, $\sin^{-1}x$ の値があり,
 $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$ で,

$$\sin(\sin^{-1}x) = x .$$

$-1 \leq x \leq 1$ である各実数 x について, $\cos^{-1}x$ の値があり, $0 \leq \cos^{-1}x \leq \pi$
で,

$$\cos(\cos^{-1}x) = x .$$

変数 x の逆正接関数 $y = \tan^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \tan^{-1}x$ を考える.

変数 x の逆正接関数 $y = \tan^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \tan^{-1}x$ を考える.

$$\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x .$$

変数 x の逆正接関数 $y = \tan^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \tan^{-1}x$ を考える.

$$\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dx} x .$$

変数 x の逆正接関数 $y = \tan^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \tan^{-1}x$ を考える.

$$\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dx} x .$$

この等式の左辺は,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan y &= \frac{d}{dy} \tan y \cdot \frac{dy}{dx} \\ \frac{d}{dx} f(y) &= \frac{d}{dy} f(y) \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

変数 x の逆正接関数 $y = \tan^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \tan^{-1}x$ を考える.

$$\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dx} x .$$

この等式の左辺は,

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dy} \tan y \cdot \frac{dy}{dx} = (1 + \tan^2 y) \frac{dy}{dx} ,$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

変数 x の逆正接関数 $y = \tan^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \tan^{-1}x$ を考える.

$$\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dx} x .$$

この等式の左辺は,

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dy} \tan y \cdot \frac{dy}{dx} = (1 + \tan^2 y) \frac{dy}{dx} ,$$

右辺は $\frac{d}{dx} x = 1$ なので, $(1 + \tan^2 y) \frac{dy}{dx} = 1$, よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} .$$

変数 x の逆正接関数 $y = \tan^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \tan^{-1}x$ を考える.

$$\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dx} x .$$

この等式の左辺は,

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dy} \tan y \cdot \frac{dy}{dx} = (1 + \tan^2 y) \frac{dy}{dx} ,$$

右辺は $\frac{d}{dx} x = 1$ なので, $(1 + \tan^2 y) \frac{dy}{dx} = 1$, よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} .$$

$y = \tan^{-1}x$ より $\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x$ なので,

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1}x = \frac{1}{1 + x^2} .$$

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1}x$ を考える.

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1}x$ を考える.

$$\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x .$$

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1}x$ を考える.

$$\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \sin y = \frac{d}{dx} x .$$

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1}x$ を考える.

$$\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \sin y = \frac{d}{dx} x .$$

この等式の左辺は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin y &= \frac{d}{dy} \sin y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos y \cdot \frac{dy}{dx} , \\ \frac{d}{dx} f(y) &= \frac{d}{dy} f(y) \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1}x$ を考える.

$$\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \sin y = \frac{d}{dx} x .$$

この等式の左辺は

$$\frac{d}{dx} \sin y = \frac{d}{dy} \sin y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos y \cdot \frac{dy}{dx} ,$$

右辺は $\frac{d}{dx} x = 1$ なので,

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

変数 x の逆正接関数 $y = \sin^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1}x$ について

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

変数 x の逆正接関数 $y = \sin^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1}x$ について

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\cos y$ を x の式で表す.

変数 x の逆正接関数 $y = \sin^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1}x$ について

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\cos y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x$ なので,

変数 x の逆正接関数 $y = \sin^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1}x$ について

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\cos y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x$ なので,
 $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$,

変数 x の逆正接関数 $y = \sin^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1}x$ について

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\cos y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x$ なので,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2 ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos y \geq 0$ なので,

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2} .$$

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1}x$ について

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\cos y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x$ なので,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2 ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos y \geq 0$ なので,

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2} .$$

よって

$$\sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1}x$ について

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\cos y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x$ なので,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2 ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos y \geq 0$ なので,

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2} .$$

よって

$$\sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$1 - x^2 > 0$ つまり $-1 < x < 1$ のとき, $\sqrt{1 - x^2} > 0$ なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} ,$$

変数 x の逆正弦関数 $y = \sin^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^{-1}x$ について

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\cos y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x$ なので,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2 ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos y \geq 0$ なので,

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2} .$$

よって

$$\sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$1 - x^2 > 0$ つまり $-1 < x < 1$ のとき, $\sqrt{1 - x^2} > 0$ なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} ,$$

$y = \sin^{-1}x$ なので

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1}x$ を考える.

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1}x$ を考える.

$$\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x .$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1}x$ を考える.

$$\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x .$$

x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \cos y = \frac{d}{dx} x .$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1}x$ を考える.

$$\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x .$$

x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \cos y = \frac{d}{dx} x .$$

この等式の左辺は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos y &= \frac{d}{dy} \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx} , \\ \frac{d}{dx} f(y) &= \frac{d}{dy} f(y) \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1}x$ を考える.

$$\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x .$$

x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \cos y = \frac{d}{dx} x .$$

この等式の左辺は

$$\frac{d}{dx} \cos y = \frac{d}{dy} \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx} ,$$

右辺は $\frac{d}{dx} x = 1$ なので,

$$-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1}x$ について

$$-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1}x$ について

$$-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\sin y$ を x の式で表す.

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1}x$ について

$$-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\sin y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x$ なので,

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1}x$ について

$$-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\sin y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x$ なので,

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2 ,$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1}x$ について

$$-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\sin y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x$ なので,

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2 ,$$

$0 \leq \cos^{-1}x \leq \pi$ つまり $0 \leq y \leq \pi$ より $\sin y \geq 0$ なので,

$$\sin y = \sqrt{1 - x^2} .$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1}x$ について

$$-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\sin y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x$ なので,

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2 ,$$

$0 \leq \cos^{-1}x \leq \pi$ つまり $0 \leq y \leq \pi$ より $\sin y \geq 0$ なので,

$$\sin y = \sqrt{1 - x^2} .$$

よって

$$-\sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1}x$ について

$$-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\sin y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x$ なので,

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2 ,$$

$0 \leq \cos^{-1}x \leq \pi$ つまり $0 \leq y \leq \pi$ より $\sin y \geq 0$ なので,

$$\sin y = \sqrt{1 - x^2} .$$

よって

$$-\sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$1 - x^2 > 0$ つまり $-1 < x < 1$ のとき, $\sqrt{1 - x^2} > 0$ なので

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} ,$$

変数 x の逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1}x$ について

$$-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$\sin y$ を x の式で表す. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, $\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x$ なので,

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2 ,$$

$0 \leq \cos^{-1}x \leq \pi$ つまり $0 \leq y \leq \pi$ より $\sin y \geq 0$ なので,

$$\sin y = \sqrt{1 - x^2} .$$

よって

$$-\sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 .$$

$1 - x^2 > 0$ つまり $-1 < x < 1$ のとき, $\sqrt{1 - x^2} > 0$ なので

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} ,$$

$y = \cos^{-1}x$ なので

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

[公式] 逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1}x = \frac{1}{x^2 + 1} .$$

逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ 及び逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ の導関数は、各々、

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) ,$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \tan^{-1} x$ と定める. 関数 f の導関数 f' を考える.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \tan^{-1} x$ と定める. 関数 f の導関数 f' を考える.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 \tan^{-1} x) = \frac{d}{dx} x^2 \cdot \tan^{-1} x + x^2 \cdot \frac{d}{dx} \tan^{-1} x$$
$$\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = \frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \tan^{-1} x$ と定める. 関数 f の導関数 f' を考える.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2 \tan^{-1} x) = \frac{d}{dx} x^2 \cdot \tan^{-1} x + x^2 \cdot \frac{d}{dx} \tan^{-1} x \\ &= 2x \cdot \tan^{-1} x + x^2 \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \qquad \frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \tan^{-1} x$ と定める. 関数 f の導関数 f' を考える.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2 \tan^{-1} x) = \frac{d}{dx} x^2 \cdot \tan^{-1} x + x^2 \cdot \frac{d}{dx} \tan^{-1} x \\ &= 2x \cdot \tan^{-1} x + x^2 \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= 2x \tan^{-1} x + \frac{x^2}{x^2 + 1} . \end{aligned}$$

終

例 変数 s の関数 $t = \frac{\sin^{-1} s}{s^2}$ を微分する.

例 変数 s の関数 $t = \frac{\sin^{-1} s}{s^2}$ を微分する.

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{\sin^{-1} s}{s^2} = \frac{\frac{d}{ds} \sin^{-1} s \cdot s^2 - \sin^{-1} s \cdot \frac{d}{ds} s^2}{(s^2)^2}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2}$$

例 変数 s の関数 $t = \frac{\sin^{-1} s}{s^2}$ を微分する.

$$\begin{aligned}\frac{dt}{ds} &= \frac{d}{ds} \frac{\sin^{-1} s}{s^2} = \frac{\frac{d}{ds} \sin^{-1} s \cdot s^2 - \sin^{-1} s \cdot \frac{d}{ds} s^2}{(s^2)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \cdot s^2 - \sin^{-1} s \cdot 2s}{s^4} \quad \frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

例 変数 s の関数 $t = \frac{\sin^{-1} s}{s^2}$ を微分する.

$$\begin{aligned}\frac{dt}{ds} &= \frac{d}{ds} \frac{\sin^{-1} s}{s^2} = \frac{\frac{d}{ds} \sin^{-1} s \cdot s^2 - \sin^{-1} s \cdot \frac{d}{ds} s^2}{(s^2)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \cdot s^2 - \sin^{-1} s \cdot 2s}{s^4} = \frac{s^2 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}}{s^4} - \frac{2s \sin^{-1} s}{s^4} \\ &= \frac{1}{s^2 \sqrt{1-s^2}} - \frac{2 \sin^{-1} s}{s^3} .\end{aligned}$$

終

問3.7.1 変数 u の関数 $v = \frac{\tan^{-1}u}{u^2+1}$ を微分せよ.

$$\frac{dv}{du} = \frac{d}{du} \frac{\tan^{-1}u}{u^2+1} =$$

終

問3.7.1 変数 u の関数 $v = \frac{\tan^{-1}u}{u^2 + 1}$ を微分せよ.

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \frac{d}{du} \frac{\tan^{-1}u}{u^2 + 1} = \frac{\frac{d}{du} \tan^{-1}u \cdot (u^2 + 1) - \tan^{-1}u \cdot \frac{d}{du}(u^2 + 1)}{(u^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{u^2 + 1} \cdot (u^2 + 1) - \tan^{-1}u \cdot 2u}{(u^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1 - 2u \tan^{-1}u}{(u^2 + 1)^2} .\end{aligned}$$

終

問3.7.2 区間 $[-1, 1]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = (1 - x^2) \sin^{-1} x$ と定める. 関数 g の導関数 g' を求めよ.

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \{(1 - x^2) \sin^{-1} x\} =$$

問3.7.2 区間 $[-1, 1]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = (1 - x^2) \sin^{-1} x$ と定める．関数 g の導関数 g' を求めよ．

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \{(1 - x^2) \sin^{-1} x\} = \frac{d}{dx} (1 - x^2) \cdot \sin^{-1} x + (1 - x^2) \frac{d}{dx} \sin^{-1} x \\ &= -2x \sin^{-1} x + (1 - x^2) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \sqrt{1 - x^2} - 2x \sin^{-1} x . \end{aligned}$$

終

例 変数 x の関数 $\sin^{-1}x^2$ を微分する.

例 変数 x の関数 $\sin^{-1}x^2$ を微分する. 変数 y を $y = x^2$ とおく.

$\sin^{-1}x^2 = \sin^{-1}y$ なので,

例 変数 x の関数 $\sin^{-1}x^2$ を微分する. 変数 y を $y = x^2$ とおく.

$\sin^{-1}x^2 = \sin^{-1}y$ なので,

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1}x^2 = \frac{d}{dx} \sin^{-1}y = \frac{d}{dy} \sin^{-1}y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dy} f(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

例 変数 x の関数 $\sin^{-1}x^2$ を微分する. 変数 y を $y = x^2$ とおく.

$\sin^{-1}x^2 = \sin^{-1}y$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sin^{-1}x^2 &= \frac{d}{dx} \sin^{-1}y = \frac{d}{dy} \sin^{-1}y \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{d}{dx} x^2 \qquad \frac{d}{dx} \sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

例 変数 x の関数 $\sin^{-1}x^2$ を微分する. 変数 y を $y = x^2$ とおく.

$\sin^{-1}x^2 = \sin^{-1}y$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sin^{-1}x^2 &= \frac{d}{dx} \sin^{-1}y = \frac{d}{dy} \sin^{-1}y \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{d}{dx} x^2 = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.\end{aligned}$$

終

問3.7.3 変数 t の関数 $\tan^{-1}t^3$ を微分せよ.

変数 x を $x =$ とおく.

$$\frac{d}{dt} \tan^{-1}t^3 =$$

問3.7.3 変数 t の関数 $\tan^{-1}t^3$ を微分せよ.

変数 x を $x = t^3$ とおく.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \tan^{-1}t^3 &= \frac{d}{dt} \tan^{-1}x = \frac{d}{dx} \tan^{-1}x \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{x^2 + 1} \frac{d}{dt} t^3 = \frac{1}{(t^3)^2 + 1} 3t^2 \\ &= \frac{3t^2}{t^6 + 1} .\end{aligned}$$

終

問3.7.4 変数 y の関数 $z = \sqrt{\cos^{-1}y}$ を微分せよ.

変数 t を $t =$ とおく.

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy} \sqrt{\cos^{-1}y} =$$

問3.7.4 変数 y の関数 $z = \sqrt{\cos^{-1}y}$ を微分せよ.

変数 t を $t = \cos^{-1}y$ とおく.

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dy} &= \frac{d}{dy} \sqrt{\cos^{-1}y} = \frac{d}{dy} \sqrt{t} = \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{dy} \\ &= \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dy} \cos^{-1}y = \frac{1}{2\sqrt{\cos^{-1}y}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{(1-y^2)\cos^{-1}y}}.\end{aligned}$$

終