3.5 合成関数の微分法

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t = \varphi(x)$ とおき，変数 y を $y = f(t)$ とおく． $y = f(t) = f(\varphi(x))$ ．

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t=\varphi(x)$ とおき，変数 y を $y=f(t)$ とおく． $y=f(t)=f(\varphi(x))$ ．x の増分 $\mathit{\Delta} x$ に対して，t の増分を $\mathit{\Delta} t$ とおき，y の増分を $\mathit{\Delta} y$ とおく．

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t=\varphi(x)$ とおき，変数 y を $y=f(t)$ とおく． $y=f(t)=f(\varphi(x))$ ．x の増分 $\mathit{\Delta} x$ に対して，t の増分を $\mathit{\Delta} t$ とおき，y の増分を $\mathit{\Delta} y$ とおく．合成関数 $y=f(\varphi(x))$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\mathit{\Delta} x\to 0}\dfrac{\mathit{\Delta} y}{\mathit{\Delta} x}$ を考える．

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t=\varphi(x)$ とおき，変数 y を $y=f(t)$ とおく． $y=f(t)=f(\varphi(x))$ ． x の増分 $\varDelta x$ に対して，t の増分を $\varDelta t$ とおき，y の増分を $\varDelta y$ とおく．合成関数 $y=f(\varphi(x))$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\lim_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}$ を考える． $\varDelta x\to 0$ とするので $\varDelta x\neq 0$ ． $\varDelta t\neq 0$ とする．

$\varDelta x\to 0$ のとき $\varDelta x\neq 0$ は約束事であるが，$\varDelta t$ の値はどうなるか分からないので， $\varDelta t\neq 0$ を前提とした．

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t=\varphi(x)$ とおき，変数 y を $y=f(t)$ とおく． $y=f(t)=f(\varphi(x))$ ．x の増分 $\mathit{\Delta} x$ に対して，t の増分を $\mathit{\Delta} t$ とおき，y の増分を $\mathit{\Delta} y$ とおく．合成関数 $y=f(\varphi(x))$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\mathit{\Delta} x\to 0}\dfrac{\mathit{\Delta} y}{\mathit{\Delta} x}$ を考える．$\mathit{\Delta} x\to 0$ とするので $\mathit{\Delta} x\neq 0$ ． $\mathit{\Delta} t\neq 0$ とする．

$$\frac{\mathit{\Delta} y}{\mathit{\Delta} x}=\frac{\mathit{\Delta} y}{\mathit{\Delta} t}\cdot\frac{\mathit{\Delta} t}{\mathit{\Delta} x}\ .$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad .$$

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\varDelta y}{\varDelta t} \cdot \frac{\varDelta t}{\varDelta x} \ .$$

φ は微分可能なので，定理 **2.7** により φ 連続である.

[定理 **2.7**] 関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \ .$$

φ は微分可能なので，定理 **2.7** により φ 連続である．定理 **2.3.2** により

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(x + \Delta x) = \varphi\Bigl(\lim_{\Delta x \to 0}(x + \Delta x)\Bigr) = \varphi(x) \ ,$$

[定理 **2.3.2**] 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるとする．定数 a に対して，変数 x について $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば，$\lim_{x \to a} g\bigl(f(x)\bigr) = g\Bigl(\lim_{x \to a} f(x)\Bigr)$.

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\varDelta y}{\varDelta t} \cdot \frac{\varDelta t}{\varDelta x} \ .$$

φ は微分可能なので，定理 **2.7** により φ 連続である．定理 **2.3.2** により

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \varphi(x + \varDelta x) = \varphi\left(\lim_{\varDelta x \to 0}(x + \varDelta x)\right) = \varphi(x) \ ,$$

よって $\varDelta x \to 0$ のとき $\varDelta t = \varDelta\varphi(x) = \varphi(x+\varDelta x) - \varphi(x) \to 0$ ．

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\varDelta y}{\varDelta t} \cdot \frac{\varDelta t}{\varDelta x} \ .$$

φ は微分可能なので，定理 **2.7** により φ 連続である．定理 **2.3.2** により

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \varphi(x + \varDelta x) = \varphi\Big(\lim_{\varDelta x \to 0}(x + \varDelta x)\Big) = \varphi(x) \ ,$$

よって $\varDelta x \to 0$ のとき $\varDelta t = \varDelta\varphi(x) = \varphi(x + \varDelta x) - \varphi(x) \to 0$ ．定理 **2.3.3** により，

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta t} = \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta t} = \frac{dy}{dt} \ .$$

[定理 **2.3.3**]　変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて，$f(x) = g(y)$ で，定数 a と b とについて，変数 x について $x \to a$ のとき $y \to b$ ，$y \neq b$ とする． $y \to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{y \to b} g(y) \ .$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \ .$$

φ は微分可能なので，定理 **2.7** により φ 連続である．定理 **2.3.2** により

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(x + \Delta x) = \varphi\Big(\lim_{\Delta x \to 0}(x + \Delta x)\Big) = \varphi(x) \ ,$$

よって $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta t = \Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \to 0$ ．定理 **2.3.3** により，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} \ .$$

更に $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{dt}{dx}$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\varDelta y}{\varDelta t}\cdot\frac{\varDelta t}{\varDelta x} \ .$$

φ は微分可能なので，定理 **2.7** により φ 連続である．定理 **2.3.2** により

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\varphi(x+\varDelta x) = \varphi\Big(\lim_{\varDelta x\to 0}(x+\varDelta x)\Big) = \varphi(x) \ ,$$

よって $\varDelta x \to 0$ のとき $\varDelta t = \varDelta\varphi(x) = \varphi(x+\varDelta x) - \varphi(x) \to 0$ ．定理 **2.3.3** により，

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t} = \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t} = \frac{dy}{dt} \ .$$

更に $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta t}{\varDelta x} = \frac{dt}{dx}$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x\to 0}\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\cdot\frac{\varDelta t}{\varDelta x}\right) = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta t}{\varDelta x} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

つまり

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \ .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad .$$

$y = f(t)$　なので，　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx} f(t)$ ，　$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt} f(t)$ ，よって

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx} \quad .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad .$$

$y = f(t)$ なので，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx} f(t)$ ，$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt} f(t)$ ，よって

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx} \quad .$$

$\varDelta t \neq 0$ を前提にしたが，この前提がなくても上の等式は成り立つ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$y = f(t)$ なので， $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx} f(t)$ ， $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt} f(t)$ ，よって

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$\mathit{\Delta} t \neq 0$ を前提にしたが，この前提がなくても上の等式は成り立つ．

[合成関数の微分法] 関数 φ と f とが微分可能であり φ の値域が f の定義域に含まれるとき，変数 x, y を $y = \varphi(x)$ とすると，

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin(3x+2)$ と定める．g の導関数 g' を求める．

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin(3x+2)$ と定める．g の導関数 g' を求める．変数 t を $t = 3x+2$ とおく． $g(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin(3x+2)$ と定める．g の導関数 g' を求める．変数 t を $t = 3x+2$ とおく． $g(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する．

微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ を適用できるのは，$\dfrac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が $\sin$ の中身と一致するときである．

$$\frac{d}{d\boxed{x}}\sin\boxed{x} = \cos x \ , \qquad \frac{d}{d\boxed{t}}\sin\boxed{t} = \cos t \ .$$

一致　　一致

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin(3x+2)$ と定める．g の導関数 g' を求める．変数 t を $t = 3x+2$ とおく．$g(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する．

微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ を適用できるのは，$\dfrac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が sin の中身と一致するときである．

$$\underbrace{\frac{d}{d\boxed{x}}\sin\boxed{x}}_{一致} = \cos x \ , \qquad \underbrace{\frac{d}{d\boxed{t}}\sin\boxed{t}}_{一致} = \cos t \ .$$

なので，変数 x の関数 $g(x) = \sin t$ の導関数

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\sin t$$

を計算するには，このままでは微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ を適用できない．

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin(3x+2)$ と定める．g の導関数 g' を求める．変数 t を $t = 3x+2$ とおく． $g(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin(3x+2)$ と定める．g の導関数 g' を求める．変数 t を $t = 3x+2$ とおく．$g(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する．

微分公式 $\dfrac{d}{dx}f(t) = \dfrac{d}{dt}f(t) \cdot \dfrac{dt}{dx}$ において $f(t) = \sin t$ とおく：

$$\frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t \cdot \frac{dt}{dx}$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin(3x+2)$ と定める．g の導関数 g' を求める．変数 t を $t = 3x+2$ とおく． $g(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する．

微分公式 $\dfrac{d}{dx}f(t) = \dfrac{d}{dt}f(t) \cdot \dfrac{dt}{dx}$ において $f(t) = \sin t$ とおく：

$$\frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin(3x+2)$ と定める．g の導関数 g' を求める．変数 t を $t = 3x+2$ とおく． $g(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する．

微分公式 $\dfrac{d}{dx}f(t) = \dfrac{d}{dt}f(t)\cdot\dfrac{dt}{dx}$ において $f(t) = \sin t$ とおく：

$$\frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t\cdot\frac{dt}{dx} = \cos t\cdot\frac{dt}{dx} \ .$$

$t = 3x+2$ なので， $\cos t = \cos(3x+2)$ ， $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3x+2) = 3$ ，よって，

$$\cos t\cdot\frac{dt}{dx} = \cos(3x+2)\cdot 3 = 3\cos(3x+2) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=\sin(3x+2)$ と定める．g の導関数 g' を求める．変数 t を $t=3x+2$ とおく．$g(x)=\sin(3x+2)=\sin t$ を微分する．

微分公式 $\dfrac{d}{dx}f(t)=\dfrac{d}{dt}f(t)\cdot\dfrac{dt}{dx}$ において $f(t)=\sin t$ とおく：

$$\frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t\cdot\frac{dt}{dx} = \cos t\cdot\frac{dt}{dx} .$$

$t=3x+2$ なので，$\cos t=\cos(3x+2)$ ，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}(3x+2)=3$ ，よって，

$$\cos t\cdot\frac{dt}{dx} = \cos(3x+2)\cdot 3 = 3\cos(3x+2) .$$

故に

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\sin t=\cos t\cdot\frac{dt}{dx}=3\cos(3x+2) .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $y = \cos\dfrac{4x+5}{3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = \cos\dfrac{4x+5}{3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \dfrac{4x+5}{3}$ とおく. $y = \cos\dfrac{4x+5}{3} = \cos t$ なので

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = \cos\dfrac{4x+5}{3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \dfrac{4x+5}{3}$ とおく. $y = \cos\dfrac{4x+5}{3} = \cos t$ なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos t = \frac{d}{dt}\cos t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx} \quad .$$

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

例　変数 x の関数 $y=\cos\dfrac{4x+5}{3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める．

変数 t を $t=\dfrac{4x+5}{3}$ とおく． $y=\cos\dfrac{4x+5}{3}=\cos t$ なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos t = \frac{d}{dt}\cos t\cdot\frac{dt}{dx} = -\sin t\cdot\frac{dt}{dx} \ .$$

$t=\dfrac{4x+5}{3}$ なので， $\sin t=\sin\dfrac{4x+5}{3}$ ， $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}\dfrac{4x+5}{3}=\dfrac{4}{3}$ ，よって，

$$-\sin t\cdot\frac{dt}{dx} = -\sin\frac{4x+5}{3}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}\sin\frac{4x+5}{3} \ .$$

例 変数 x の関数 $y = \cos\dfrac{4x+5}{3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \dfrac{4x+5}{3}$ とおく. $y = \cos\dfrac{4x+5}{3} = \cos t$ なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos t = \frac{d}{dt}\cos t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$t = \dfrac{4x+5}{3}$ なので, $\sin t = \sin\dfrac{4x+5}{3}$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{4x+5}{3} = \dfrac{4}{3}$, よって,

$$-\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin\frac{4x+5}{3} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}\sin\frac{4x+5}{3} .$$

故に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos t = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{4}{3}\sin\frac{4x+5}{3} .$$

終

$\boxed{問3.5.1}$ $\dfrac{7x-5}{3}$ が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数 x の全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \tan\dfrac{7x-5}{3}$ と定める．f の導関数 f' を求めよ．

変数 t を $t =$ 　　　　　　とおく．$f(x) = \tan\dfrac{7x-5}{3} =$ 　　　　．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) =$$

$\boxed{問3.5.1}$ $\dfrac{7x-5}{3}$ が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数 x の全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \tan\dfrac{7x-5}{3}$ と定める. f の導関数 f' を求めよ.

変数 t を $t = \dfrac{7x-5}{3}$ とおく. $f(x) = \tan\dfrac{7x-5}{3} = \tan t$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\tan t = \frac{d}{dt}\tan t \cdot \frac{dt}{dx}$$

$\boxed{問3.5.1}$ $\dfrac{7x-5}{3}$ が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数 x の全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \tan\dfrac{7x-5}{3}$ と定める. f の導関数 f' を求めよ.

変数 t を $t = \dfrac{7x-5}{3}$ とおく. $f(x) = \tan\dfrac{7x-5}{3} = \tan t$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\tan t = \frac{d}{dt}\tan t \cdot \frac{dt}{dx} \\
&= \sec^2 t \cdot \frac{d}{dx}\frac{7x-5}{3} = \sec^2\frac{7x-5}{3} \cdot \frac{7}{3} \\
&= \frac{7}{3}\sec^2\frac{7x-5}{3} \quad .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める.

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=\ln(x^2-5x+7)$ と定める. 各実数 x について, $x^2-5x+7=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0$ なので, $g(x)=\ln(x^2-5x+7)$ の値がある.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく． $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$ なので

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく． $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$ なので

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \ln t = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく． $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$ なので

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \ln t = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$t = x^2 - 5x + 7$ なので， $\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 7}$ ， $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^2 - 5x + 7) = 2x - 5$ ，

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく． $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$ なので

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \ln t = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$t = x^2 - 5x + 7$ なので， $\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 7}$ ， $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^2 - 5x + 7) = 2x - 5$ ，よって

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2 - 5x + 7} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=\ln(x^2-5x+7)$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

変数 t を $t=x^2-5x+7$ とおく． $g(x)=\ln(x^2-5x+7)=\ln t$ なので

$$g'(x)=\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}\ln t=\frac{d}{dt}\ln t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

$t=x^2-5x+7$ なので， $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{x^2-5x+7}$ ， $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}(x^2-5x+7)=2x-5$ ，よって

$$\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2-5x+7}\cdot(2x-5)=\frac{2x-5}{x^2-5x+7}\ .$$

故に

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\ln t=\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{2x-5}{x^2-5x+7}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}3.5.2}$ 変数 x の関数 $y = \ln(3x^2 - 7x + 5)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

変数 t を $t =$ とおく． $y = \ln(3x^2 - 7x + 5) =$ なので，

$$\frac{dy}{dx} =$$

$\boxed{問3.5.2}$ 変数 x の関数 $y = \ln(3x^2 - 7x + 5)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

変数 t を $t = 3x^2 - 7x + 5$ とおく． $y = \ln(3x^2 - 7x + 5) = \ln t$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \ln t = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$\boxed{問3.5.2}$ 変数 x の関数 $y = \ln(3x^2 - 7x + 5)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

変数 t を $t = 3x^2 - 7x + 5$ とおく． $y = \ln(3x^2 - 7x + 5) = \ln t$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\ln t = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\cdot\frac{d}{dx}(3x^2 - 7x + 5)\\ &= \frac{1}{3x^2 - 7x + 5}\cdot(6x - 7)\\ &= \frac{6x - 7}{3x^2 - 7x + 5}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $y=\cos^4 x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

例 変数 x の関数 $y=\cos^4 x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t=\cos x$ とおく. $y=(\cos x)^4=t^4$ なので,

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $y = \cos^4 x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \cos x$ とおく. $y = (\cos x)^4 = t^4$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}t^4 = \frac{d}{dt}t^4 \cdot \frac{dt}{dx} = 4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = \cos^4 x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める．

変数 t を $t = \cos x$ とおく． $y = (\cos x)^4 = t^4$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}t^4 = \frac{d}{dt}t^4 \cdot \frac{dt}{dx} = 4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$t = \cos x$ なので， $t^3 = (\cos x)^3 = \cos^3 x$ ， $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ ，よって

$$4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} = 4\cos^3 x \cdot (-\sin x) = -4\sin x \cos^3 x \ .$$

例 変数 x の関数 $y=\cos^4 x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t=\cos x$ とおく. $y=(\cos x)^4=t^4$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}t^4 = \frac{d}{dt}t^4 \cdot \frac{dt}{dx} = 4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$t=\cos x$ なので, $t^3=(\cos x)^3=\cos^3 x$, $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$, よって

$$4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} = 4\cos^3 x \cdot (-\sin x) = -4\sin x\cos^3 x \ .$$

故に

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}t^4=4t^3\cdot\frac{dt}{dx}=-4\sin x\cos^3 x \ .$$ 終

$\boxed{\text{問}3.5.3}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \sin^3 x$ と定める．関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ．

変数 t を $t =$ 　　　とおく． $\psi(x) = (\sin x)^3 =$ 　　なので，

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\qquad = \frac{d}{dt}\qquad \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$\boxed{\text{問}3.5.3}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \sin^3 x$ と定める．関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ．

変数 t を $t = \sin x$ とおく． $\psi(x) = (\sin x)^3 = t^3$ なので，

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}t^3 = \frac{d}{dt}t^3 \cdot \frac{dt}{dx} = 3t^2 \cdot \frac{d}{dx}\sin x = 3(\sin x)^2 \cos x$$
$$= 3\sin^2 x \cos x \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は，f の導関数 f' の a に対する値 $f'(a)$ であった．

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 $\psi(x) = \cos\dfrac{5x+8\pi}{3}$ の π における微分係数を求める.

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 $\psi(x) = \cos\dfrac{5x+8\pi}{3}$ の π における微分係数を求める．変数 t を $t = \dfrac{5x+8\pi}{3}$ とおく． $\psi(x) = \cos\dfrac{5x+8\pi}{3} = \cos t$ なので，

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 $\psi(x)=\cos\dfrac{5x+8\pi}{3}$ の π における微分係数を求める．変数 t を $t=\dfrac{5x+8\pi}{3}$ とおく． $\psi(x)=\cos\dfrac{5x+8\pi}{3}=\cos t$ なので，

$$\psi'(x)=\frac{d}{dx}\psi(x)=\frac{d}{dx}\cos t=\frac{d}{dt}\cos t\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}f(t)=\frac{d}{dt}f(t)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 $\psi(x)=\cos\dfrac{5x+8\pi}{3}$ の π における微分係数を求める．変数 t を $t=\dfrac{5x+8\pi}{3}$ とおく．$\psi(x)=\cos\dfrac{5x+8\pi}{3}=\cos t$ なので，

$$\begin{aligned}\psi'(x)&=\frac{d}{dx}\psi(x)=\frac{d}{dx}\cos t=\frac{d}{dt}\cos t\cdot\frac{dt}{dx}\\&=-\sin t\cdot\frac{d}{dx}\frac{5x+8\pi}{3}=-\sin\frac{5x+8\pi}{3}\cdot\frac{5}{3}\\&=-\frac{5}{3}\sin\frac{5x+8\pi}{3}\ .\end{aligned}$$

例 実数全体を定義域とする関数 $\psi(x)=\cos\dfrac{5x+8\pi}{3}$ の π における微分係数を求める．変数 t を $t=\dfrac{5x+8\pi}{3}$ とおく．$\psi(x)=\cos\dfrac{5x+8\pi}{3}=\cos t$ なので，

$$\begin{aligned}\psi'(x)&=\frac{d}{dx}\psi(x)=\frac{d}{dx}\cos t=\frac{d}{dt}\cos t\cdot\frac{dt}{dx}\\&=-\sin t\cdot\frac{d}{dx}\frac{5x+8\pi}{3}=-\sin\frac{5x+8\pi}{3}\cdot\frac{5}{3}\\&=-\frac{5}{3}\sin\frac{5x+8\pi}{3}\ .\end{aligned}$$

π における $\psi(x)$ の微分係数は

$$\begin{aligned}\psi'(\pi)&=-\frac{5}{3}\sin\frac{5\pi+8\pi}{3}=-\frac{5}{3}\sin\frac{13\pi}{3}\\&=-\frac{5}{3}\sin\left(\frac{13\pi}{3}-4\pi\right)=-\frac{5}{3}\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{5}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=-\frac{5\sqrt{3}}{6}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}3.5.4}$ 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = \sin\dfrac{7x+8\pi}{3}$ の $\dfrac{\pi}{2}$ における微分係数を求めよ.

変数 t を $t =$ とおく.

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\sin\frac{7x+8\pi}{3} =$$

$\dfrac{\pi}{2}$ における φ の微分係数は

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$\boxed{問3.5.4}$ 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = \sin\dfrac{7x+8\pi}{3}$ の $\dfrac{\pi}{2}$ における微分係数を求めよ.

変数 t を $t = \dfrac{7x+8\pi}{3}$ とおく.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\sin\frac{7x+8\pi}{3} = \frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot \frac{d}{dx}\frac{7x+8\pi}{3} \\ &= \frac{7}{3}\cos\frac{7x+8\pi}{3} \quad .\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{2}$ における φ の微分係数は

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$\boxed{\text{問}3.5.4}$ 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = \sin\dfrac{7x+8\pi}{3}$ の $\dfrac{\pi}{2}$ における微分係数を求めよ.

変数 t を $t = \dfrac{7x+8\pi}{3}$ とおく.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\sin\frac{7x+8\pi}{3} = \frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t\cdot\frac{dt}{dx} = \cos t\cdot\frac{d}{dx}\frac{7x+8\pi}{3}\\ &= \frac{7}{3}\cos\frac{7x+8\pi}{3}\ .\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{2}$ における φ の微分係数は

$$\begin{aligned}\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{7}{3}\cos\frac{7\cdot\frac{\pi}{2}+8\pi}{3} = \frac{7}{3}\cos\frac{23\pi}{6} = \frac{7}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{3}\cos\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{7\sqrt{3}}{6}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$