3.3 関数の積・商の微分法

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能であるとする.

$$\lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{d}{dx} f(x) \ , \qquad \lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} g(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{d}{dx} g(x) \ .$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能であるとする.

$$\lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{d}{dx} f(x) \ , \qquad \lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} g(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{d}{dx} g(x) \ .$$

関数 $f(x)\,g(x)$ の導関数

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} = \lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta}\{f(x)\,g(x)\}}{\mathit{\Delta} x}$$

を考える.

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = \lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta}\varphi(x)}{\mathit{\Delta} x}$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能であるとする．

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}f(x)\ , \qquad \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}g(x)\ .$$

関数 $f(x)\,g(x)$ の導関数

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\{f(x)\,g(x)\}}{\varDelta x}$$

を考える．変数 x の増分 $\varDelta x$ に対して，$f(x)$ の増分 $\varDelta f(x)$ 及び $g(x)$ の増分 $\varDelta g(x)$ は

$$\varDelta f(x) = f(x+\varDelta x) - f(x)\ , \qquad \varDelta g(x) = g(x+\varDelta x) - g(x)\ ;$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能であるとする.

$$\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{d}{dx}f(x) \ , \qquad \lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta} g(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{d}{dx}g(x) \ .$$

関数 $f(x)\,g(x)$ の導関数

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} = \lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}\{f(x)\,g(x)\}}{\mathit{\Delta} x}$$

を考える. 変数 x の増分 $\mathit{\Delta} x$ に対して, $f(x)$ の増分 $\mathit{\Delta} f(x)$ 及び $g(x)$ の増分 $\mathit{\Delta} g(x)$ は

$$\mathit{\Delta} f(x) = f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x) \ , \qquad \mathit{\Delta} g(x) = g(x+\mathit{\Delta} x)-g(x) \ ;$$

よって,

$$f(x+\mathit{\Delta} x) = \mathit{\Delta} f(x)+f(x) \ , \qquad g(x+\mathit{\Delta} x) = \mathit{\Delta} g(x)+g(x) \ .$$

$$f(x + \mathit{\Delta} x) = \mathit{\Delta} f(x) + f(x) \ , \qquad g(x + \mathit{\Delta} x) = \mathit{\Delta} g(x) + g(x) \ .$$

$$f(x+\mathit{\Delta} x) = \mathit{\Delta} f(x) + f(x) \ , \qquad g(x+\mathit{\Delta} x) = \mathit{\Delta} g(x) + g(x) \ .$$

x が $x+\mathit{\Delta} x$ に変化するとき，$f(x)\,g(x)$ は $f(x+\mathit{\Delta} x)\,g(x+\mathit{\Delta} x)$ に変化するので，

$$f(x+\varDelta x) = \varDelta f(x)+f(x) \ , \qquad g(x+\varDelta x) = \varDelta g(x)+g(x) \ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)\,g(x)$ は $f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)\,g(x)\}$ は

$$\varDelta\{f(x)\,g(x)\} = f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x) - f(x)\,g(x)$$

$$f(x+\varDelta x)=\varDelta f(x)+f(x)\ , \qquad g(x+\varDelta x)=\varDelta g(x)+g(x)\ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)\,g(x)$ は $f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)\,g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\varDelta\{f(x)\,g(x)\} &= f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x)-f(x)\,g(x)\\ &= \{\varDelta f(x)+f(x)\}\,g(x+\varDelta x)-f(x)\,g(x)\end{aligned}$$

$$f(x+\varDelta x) = \varDelta f(x)+f(x) \ , \qquad g(x+\varDelta x) = \varDelta g(x)+g(x) \ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)\,g(x)$ は $f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)\,g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\varDelta\{f(x)\,g(x)\} &= f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x)-f(x)\,g(x)\\ &= \{\varDelta f(x)+f(x)\}\,g(x+\varDelta x)-f(x)\,g(x)\\ &= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x)+f(x)\,g(x+\varDelta x)-f(x)\,g(x)\end{aligned}$$

$$f(x+\varDelta x) = \varDelta f(x) + f(x)\ , \qquad g(x+\varDelta x) = \varDelta g(x) + g(x)\ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)\,g(x)$ は $f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)\,g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}
\varDelta\{f(x)\,g(x)\} &= f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x) - f(x)\,g(x) \\
&= \{\varDelta f(x) + f(x)\}\,g(x+\varDelta x) - f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x) + f(x)\,g(x+\varDelta x) - f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x) + f(x)\,\{\varDelta g(x) + g(x)\} - f(x)\,g(x)
\end{aligned}$$

$$f(x+\varDelta x) = \varDelta f(x)+f(x) , \qquad g(x+\varDelta x) = \varDelta g(x)+g(x) .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)\,g(x)$ は $f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)\,g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}
\varDelta\{f(x)\,g(x)\} &= f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x)-f(x)\,g(x) \\
&= \{\varDelta f(x)+f(x)\}\,g(x+\varDelta x)-f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x)+f(x)\,g(x+\varDelta x)-f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x)+f(x)\,\{\varDelta g(x)+g(x)\}-f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x)+f(x)\cdot\varDelta g(x)+f(x)\,g(x)-f(x)\,g(x)
\end{aligned}$$

$$f(x+\varDelta x) = \varDelta f(x) + f(x)\ , \qquad g(x+\varDelta x) = \varDelta g(x) + g(x)\ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)\,g(x)$ は $f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)\,g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}
\varDelta\{f(x)\,g(x)\} &= f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x) - f(x)\,g(x) \\
&= \{\varDelta f(x) + f(x)\}\,g(x+\varDelta x) - f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x) + f(x)\,g(x+\varDelta x) - f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x) + f(x)\,\{\varDelta g(x) + g(x)\} - f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x) + f(x)\cdot\varDelta g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x) + f(x)\cdot\varDelta g(x)\ .
\end{aligned}$$

$$f(x+\varDelta x) = \varDelta f(x)+f(x) \ , \qquad g(x+\varDelta x) = \varDelta g(x)+g(x) \ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)\,g(x)$ は $f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)\,g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}
\varDelta\{f(x)\,g(x)\} &= f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x)-f(x)\,g(x) \\
&= \{\varDelta f(x)+f(x)\}\,g(x+\varDelta x)-f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x)+f(x)\,g(x+\varDelta x)-f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x)+f(x)\,\{\varDelta g(x)+g(x)\}-f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x)+f(x)\cdot\varDelta g(x)+f(x)\,g(x)-f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x)+f(x)\cdot\varDelta g(x) \ .
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\varDelta\{f(x)\,g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)\cdot g(x+\varDelta x)+f(x)\cdot\varDelta g(x)}{\varDelta x}$$

$$f(x+\varDelta x) = \varDelta f(x) + f(x) \ , \qquad g(x+\varDelta x) = \varDelta g(x) + g(x) \ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)\,g(x)$ は $f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)\,g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}
\varDelta\{f(x)\,g(x)\} &= f(x+\varDelta x)\,g(x+\varDelta x) - f(x)\,g(x) \\
&= \{\varDelta f(x) + f(x)\}\,g(x+\varDelta x) - f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x) + f(x)\,g(x+\varDelta x) - f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x) + f(x)\,\{\varDelta g(x) + g(x)\} - f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x) + f(x)\cdot\varDelta g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x) \\
&= \varDelta f(x)\,g(x+\varDelta x) + f(x)\cdot\varDelta g(x) \ .
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{\varDelta\{f(x)\,g(x)\}}{\varDelta x} &= \frac{\varDelta f(x)\cdot g(x+\varDelta x) + f(x)\cdot\varDelta g(x)}{\varDelta x} \\
&= \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\cdot g(x+\varDelta x) + f(x)\cdot\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} \ .
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathit{\Delta}\{f(x)\,g(x)\}}{\mathit{\Delta}x} \;=\; \frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x}\cdot g(x+\mathit{\Delta}x)+f(x)\cdot\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x} \quad .$$

$$\frac{\varDelta\{f(x)\,g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\cdot g(x+\varDelta x) + f(x)\cdot\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} \quad .$$

$\varDelta x \to 0$ とする.

$$\frac{\mathit{\Delta}\{f(x)\,g(x)\}}{\mathit{\Delta}x} = \frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x}\cdot g(x+\mathit{\Delta}x)+f(x)\cdot\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x} \quad .$$

$\mathit{\Delta}x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x} = \frac{d}{dx}f(x)$ ， $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x} = \frac{d}{dx}g(x)$ ．

$$\frac{\varDelta\{f(x)\,g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\cdot g(x+\varDelta x) + f(x)\cdot\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} \ .$$

$\varDelta x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}f(x)$ ， $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}g(x)$ ．関数 g は微分可能なので，定理 **2.7** により g は連続である；

[定理 **2.7**] 関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である．

$$\frac{\varDelta\{f(x)g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\cdot g(x+\varDelta x)+f(x)\cdot\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} \ .$$

$\varDelta x\to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}=\frac{d}{dx}f(x)$ ， $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}=\frac{d}{dx}g(x)$ ．関数 g は微分可能なので，定理 **2.7** により g は連続である；よって定理 **2.3.2** により $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}g(x+\varDelta x)=g\Big(\lim_{\varDelta x\to 0}(x+\varDelta x)\Big)=g(x)$ ．

[定理 **2.3.2**] 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ があるとする．定数 a に対して，変数 x について $x\to a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ において関数 g が連続であるならば，

$$\lim_{x\to a}g\big(f(x)\big) = g\Big(\lim_{x\to a}f(x)\Big) \ .$$

$$\frac{\mathit{\Delta}\{f(x)\,g(x)\}}{\mathit{\Delta}x} = \frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x}\cdot g(x+\mathit{\Delta}x) + f(x)\cdot\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x} .$$

$\mathit{\Delta}x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x} = \frac{d}{dx}f(x)$ ， $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x} = \frac{d}{dx}g(x)$ ．関数 g は微分可能なので，定理 **2.7** により g は連続である；よって定理 **2.3.2** により $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0} g(x+\mathit{\Delta}x) = g\left(\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}(x+\mathit{\Delta}x)\right) = g(x)$ ． $f(x)$ は $\mathit{\Delta}x$ と無関係である．

$$\frac{\mathit{\Delta}\{f(x)\,g(x)\}}{\mathit{\Delta}x} = \frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x}\cdot g(x+\mathit{\Delta}x)+f(x)\cdot\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x} \ .$$

$\mathit{\Delta}x\to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x}=\frac{d}{dx}f(x)$ ， $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x}=\frac{d}{dx}g(x)$ ．関数 g は微分可能なので，定理 **2.7** により g は連続である；よって定理 **2.3.2** により $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}g(x+\mathit{\Delta}x)=g\Bigl(\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}(x+\mathit{\Delta}x)\Bigr)=g(x)$ ． $f(x)$ は $\mathit{\Delta}x$ と無関係である．これらのことより，

$$\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}\{f(x)\,g(x)\}}{\mathit{\Delta}x}=\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\left\{\frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x}\cdot g(x+\mathit{\Delta}x)+f(x)\cdot\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x}\right\}$$

$$\frac{\mathit{\Delta}\{f(x)g(x)\}}{\mathit{\Delta}x} = \frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x}\cdot g(x+\mathit{\Delta}x)+f(x)\cdot\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x} \ .$$

$\mathit{\Delta}x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x} = \frac{d}{dx}f(x)$ ， $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x} = \frac{d}{dx}g(x)$ ．関数 g は微分可能なので，定理 **2.7** により g は連続である；よって定理 **2.3.2** により $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}g(x+\mathit{\Delta}x) = g\Big(\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}(x+\mathit{\Delta}x)\Big) = g(x)$ ． $f(x)$ は $\mathit{\Delta}x$ と無関係である．これらのことより，

$$\begin{aligned}\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}\{f(x)g(x)\}}{\mathit{\Delta}x} &= \lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\left\{\frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x}\cdot g(x+\mathit{\Delta}x)+f(x)\cdot\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x}\right\}\\ &= \lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x}\cdot\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}g(x+\mathit{\Delta}x)+f(x)\cdot\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x}\end{aligned}$$

$$\frac{\varDelta\{f(x)g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\cdot g(x+\varDelta x)+f(x)\cdot\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} \ .$$

$\varDelta x\to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}=\frac{d}{dx}f(x)$ ， $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}=\frac{d}{dx}g(x)$ ．関数 g は微分可能なので，定理 **2.7** により g は連続である；よって定理 **2.3.2** により $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}g(x+\varDelta x)=g\left(\lim_{\varDelta x\to 0}(x+\varDelta x)\right)=g(x)$ ． $f(x)$ は $\varDelta x$ と無関係である．これらのことより，

$$\begin{aligned}\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\{f(x)g(x)\}}{\varDelta x} &= \lim_{\varDelta x\to 0}\left\{\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\cdot g(x+\varDelta x)+f(x)\cdot\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\right\}\\ &= \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}g(x+\varDelta x)+f(x)\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\\ &= \frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x) \ .\end{aligned}$$

$$\frac{\mathit{\Delta}\{f(x)\,g(x)\}}{\mathit{\Delta}x} = \frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x}\cdot g(x+\mathit{\Delta}x)+f(x)\cdot\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x} \ .$$

$\mathit{\Delta}x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x}=\frac{d}{dx}f(x)$ ， $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x}=\frac{d}{dx}g(x)$ ．関数 g は微分可能なので，定理 **2.7** により g は連続である；よって定理 **2.3.2** により $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}g(x+\mathit{\Delta}x)=g\Big(\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}(x+\mathit{\Delta}x)\Big)=g(x)$ ． $f(x)$ は $\mathit{\Delta}x$ と無関係である．これらのことより，

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}\{f(x)\,g(x)\}}{\mathit{\Delta}x} &= \lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\left\{\frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x}\cdot g(x+\mathit{\Delta}x)+f(x)\cdot\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x}\right\}\\
&= \lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}f(x)}{\mathit{\Delta}x}\cdot\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}g(x+\mathit{\Delta}x)+f(x)\cdot\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x}\\
&= \frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x) \ .
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}\{f(x)\,g(x)\}}{\mathit{\Delta}x}=\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\}$ なので

$$\frac{\varDelta\{f(x)\,g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\cdot g(x+\varDelta x) + f(x)\cdot\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} \ .$$

$\varDelta x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}f(x)$ ， $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}g(x)$ ．関数 g は微分可能なので，定理 **2.7** により g は連続である；よって定理 **2.3.2** により $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}g(x+\varDelta x) = g\Big(\lim_{\varDelta x\to 0}(x+\varDelta x)\Big) = g(x)$ ． $f(x)$ は $\varDelta x$ と無関係である．これらのことより，

$$\begin{aligned}\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\{f(x)\,g(x)\}}{\varDelta x} &= \lim_{\varDelta x\to 0}\left\{\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\cdot g(x+\varDelta x) + f(x)\cdot\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\right\} \\ &= \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}g(x+\varDelta x) + f(x)\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} \\ &= \frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x) \ .\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\{f(x)\,g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\}$ なので

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x) \ .$$

こうして次の定理が導かれた.

[定理 **3.3.1**]　微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して，関数 $f(x)g(x)$ は微分可能であり，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}g(x) + f(x)\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 \sin x$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 \sin x$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx}(x^3 \sin x) =$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 \sin x$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(x^3 \sin x) = \frac{d}{dx}x^3 \cdot \sin x + x^3 \frac{d}{dx}\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x)$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 \sin x$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx}(x^3 \sin x) = \frac{d}{dx} x^3 \cdot \sin x + x^3 \frac{d}{dx} \sin x \\ &= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}3.3.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin x \cos x$ と定める．関数 f の導関数 f' を求めよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin x \cos x) =$$

$\boxed{問3.3.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\sin x\cos x$ と定める．関数 f の導関数 f' を求めよ．

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\sin x\cos x) = \frac{d}{dx}\sin x\cdot\cos x + \sin x\frac{d}{dx}\cos x \\
&= \cos x\cos x + \sin x(-\sin x) \\
&= \cos^2 x - \sin^2 x \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

関数 $g(x)$ は微分可能であるとする.

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx} g(x) \quad .$$

関数 $g(x)$ は微分可能であるとする．

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x) \ .$$

$g(x) \neq 0$ の範囲で関数 $\dfrac{1}{g(x)}$ の導関数

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\Delta x}$$

を考える．

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x}$$

関数 $g(x)$ は微分可能であるとする.

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}g(x) \ .$$

$g(x)\neq 0$ の範囲で関数 $\dfrac{1}{g(x)}$ の導関数

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x}$$

を考える. 変数 x の増分 $\varDelta x$ に対する $g(x)$ の増分 $\varDelta g(x)$ は

$$\varDelta g(x) = g(x+\varDelta x)-g(x) \ ,$$

よって

$$g(x+\varDelta x) = g(x)+\varDelta g(x) \ .$$

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g(x) \ .$$

$$g(x+\mathit{\Delta} x) = g(x)+\mathit{\Delta} g(x) \ .$$

x が $x+\mathit{\Delta} x$ に変化するとき，$\dfrac{1}{g(x)}$ は $\dfrac{1}{g(x+\mathit{\Delta} x)}$ に変化するので，その増分 $\mathit{\Delta}\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}$ は

$$\mathit{\Delta}\left\{\frac{1}{g(x)}\right\} = \frac{1}{g(x+\mathit{\Delta} x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x)-g(x+\mathit{\Delta} x)}{g(x+\mathit{\Delta} x)\,g(x)}$$

$$g(x+\mathit{\Delta} x) = g(x)+\mathit{\Delta} g(x) \ .$$

x が $x+\mathit{\Delta} x$ に変化するとき，$\dfrac{1}{g(x)}$ は $\dfrac{1}{g(x+\mathit{\Delta} x)}$ に変化するので，その増分 $\mathit{\Delta}\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}$ は

$$\begin{aligned}\mathit{\Delta}\left\{\frac{1}{g(x)}\right\} &= \frac{1}{g(x+\mathit{\Delta} x)}-\frac{1}{g(x)} = \frac{g(x)-g(x+\mathit{\Delta} x)}{g(x+\mathit{\Delta} x)\,g(x)} = \frac{g(x)-\{g(x)+\mathit{\Delta} g(x)\}}{g(x+\mathit{\Delta} x)\,g(x)} \\ &= -\frac{\mathit{\Delta} g(x)}{g(x+\mathit{\Delta} x)\,g(x)} \ .\end{aligned}$$

$$g(x+\varDelta x) = g(x)+\varDelta g(x) \ .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$\dfrac{1}{g(x)}$ は $\dfrac{1}{g(x+\varDelta x)}$ に変化するので，その増分 $\varDelta\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}$ は

$$\begin{aligned}\varDelta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\} &= \frac{1}{g(x+\varDelta x)}-\frac{1}{g(x)} = \frac{g(x)-g(x+\varDelta x)}{g(x+\varDelta x)\,g(x)} = \frac{g(x)-\{g(x)+\varDelta g(x)\}}{g(x+\varDelta x)\,g(x)} \\ &= -\frac{\varDelta g(x)}{g(x+\varDelta x)\,g(x)} \ .\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{\varDelta\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x} = \frac{-\dfrac{\varDelta g(x)}{g(x)\,g(x+\varDelta x)}}{\varDelta x} = -\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\,\frac{1}{g(x)\,g(x+\varDelta x)} \ .$$

$$\frac{\varDelta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x} = -\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\,\frac{1}{g(x)\,g(x+\varDelta x)} \quad .$$

$$\frac{\mathit{\Delta}\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\mathit{\Delta} x} = -\frac{\mathit{\Delta} g(x)}{\mathit{\Delta} x}\,\frac{1}{g(x)\,g(x+\mathit{\Delta} x)} \quad .$$

$\mathit{\Delta} x \to 0$ とする.

$$\frac{\varDelta\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x} = -\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\,\frac{1}{g(x)\,g(x+\varDelta x)} \quad .$$

$\varDelta x \to 0$ とする． $\displaystyle \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}\,g(x)$ ．

$$\frac{\varDelta\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x} = -\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\,\frac{1}{g(x)\,g(x+\varDelta x)}\ .$$

$\varDelta x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}g(x)$ ．関数 g は微分可能なので，定理 **2.7** により g は連続である；

[定理 **2.7**] 関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である．

$$\frac{\varDelta\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x} = -\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\,\frac{1}{g(x)\,g(x+\varDelta x)} \ .$$

$\varDelta x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}g(x)$ ．関数 g は微分可能なので，定理 **2.7** により g は連続である；よって定理 **2.3.2** により $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0} g(x+\varDelta x) = g\Big(\lim_{\varDelta x\to 0}(x+\varDelta x)\Big) = g(x)$ ．

[定理 **2.3.2**] 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ があるとする．定数 a に対して，変数 x について $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば，

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big) \ .$$

$$\frac{\varDelta\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x} = -\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\,\frac{1}{g(x)\,g(x+\varDelta x)} \ .$$

$\varDelta x \to 0$ とする. $\displaystyle\lim_{\varDelta x \to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}g(x)$. 関数 g は微分可能なので、定理 **2.7** により g は連続である;よって定理 **2.3.2** により $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0} g(x+\varDelta x) = g\Big(\lim_{\varDelta x\to 0}(x+\varDelta x)\Big) = g(x)$. $g(x)$ は $\varDelta x$ と無関係である.

$$\frac{\mathit{\Delta}\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\mathit{\Delta}x} = -\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x}\,\frac{1}{g(x)\,g(x+\mathit{\Delta}x)}\ .$$

$\mathit{\Delta}x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x} = \frac{d}{dx}g(x)$ ．関数 g は微分可能なので，定理 **2.7** により g は連続である；よって定理 **2.3.2** により $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}g(x+\mathit{\Delta}x) = g\left(\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}(x+\mathit{\Delta}x)\right) = g(x)$ ． $g(x)$ は $\mathit{\Delta}x$ と無関係である．これらのことより，

$$\lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\frac{\mathit{\Delta}\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\mathit{\Delta}x} = \lim_{\mathit{\Delta}x\to 0}\left\{-\frac{\mathit{\Delta}g(x)}{\mathit{\Delta}x}\,\frac{1}{g(x)\,g(x+\mathit{\Delta}x)}\right\}$$

$$\frac{\varDelta\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x} = -\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\,\frac{1}{g(x)\,g(x+\varDelta x)} \ .$$

$\varDelta x \to 0$ とする． $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}g(x)$ ．関数 g は微分可能なので，定理 **2.7** により g は連続である；よって定理 **2.3.2** により $\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0} g(x+\varDelta x) = g\Big(\lim_{\varDelta x\to 0}(x+\varDelta x)\Big) = g(x)$ ． $g(x)$ は $\varDelta x$ と無関係である．これらのことより，

$$\begin{aligned}
\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x} &= \lim_{\varDelta x\to 0}\left\{-\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\,\frac{1}{g(x)\,g(x+\varDelta x)}\right\} \\
&= -\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\cdot\frac{1}{g(x)\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0} g(x+\varDelta x)} = -\frac{d}{dx}g(x)\cdot\frac{1}{g(x)\,g(x)} \\
&= -\frac{\dfrac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \ .
\end{aligned}$$

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta \left\{ \dfrac{1}{g(x)} \right\}}{\varDelta x} \;=\; -\frac{\dfrac{d}{dx}\, g(x)}{g(x)^2} \quad .$$

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta \left\{ \dfrac{1}{g(x)} \right\}}{\varDelta x} = -\frac{\dfrac{d}{dx}\, g(x)}{g(x)^2} \quad .$$

$\displaystyle \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta \left\{ \dfrac{1}{g(x)} \right\}}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}\, \frac{1}{g(x)}$　なので

$$\frac{d}{dx}\, \frac{1}{g(x)} = -\frac{\dfrac{d}{dx}\, g(x)}{g(x)^2} \quad .$$

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x} = -\frac{\dfrac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \quad .$$

$\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)}$　なので

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = -\frac{\dfrac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \quad .$$

　こうして次の定理が導かれた.

[定理 **3.3.2**]　微分可能な関数 $g(x)$ に対して，関数 $\dfrac{1}{g(x)}$ は $g(x) \neq 0$ のとき微分可能であり，

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = -\frac{\dfrac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \quad (\ g(x) \neq 0\ ) .$$

　微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して，$g(x) \neq 0$ の範囲で関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を微分する．

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して，$g(x) \neq 0$ の範囲で関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を微分する．

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx}\left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\} = \frac{d}{dx}f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\{\varphi(x)\psi(x)\} = \frac{d}{dx}\varphi(x)\cdot\psi(x) + \varphi(x)\cdot\frac{d}{dx}\psi(x)$$

　微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して，$g(x) \neq 0$ の範囲で関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を微分する．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx}\left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\} = \frac{d}{dx}f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} \\
&= \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{g(x)} + f(x)\left\{-\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}\right\} = \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}
$$

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して， $g(x) \neq 0$ の範囲で関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を微分する．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx}\left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\} = \frac{d}{dx}f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} \\
&= \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{g(x)} + f(x)\left\{-\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}\right\} = \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{\frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \ .
\end{aligned}
$$

こうして次の定理が導かれた.

[定理 **3.3.3**]　微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $g(x) \neq 0$ のとき微分可能であり,

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{d}{dx}f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot\dfrac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \quad (\ g(x) \neq 0\ ).$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=\dfrac{5}{2\cos x+3}$ と定める．各実数 x について， $\sin x \geq -1$ なので， $2\sin x \geq -2$ ， $2\sin x+3 \geq 1$ ． $2\cos x+3$ の値が 0 であることはない．

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{5}{2\cos x + 3}$ と定める．関数 φ の導関数 φ' を求める．

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\frac{5}{2\cos x + 3} = 5\frac{d}{dx}\frac{1}{2\cos x + 3}$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{5}{2\cos x + 3}$ と定める．関数 φ の導関数 φ' を求める．

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\frac{5}{2\cos x + 3} = 5\frac{d}{dx}\frac{1}{2\cos x + 3} \\ &= 5\frac{-\frac{d}{dx}(2\cos x + 3)}{(2\cos x + 3)^2} \qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \frac{-\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{5}{2\cos x + 3}$ と定める．関数 φ の導関数 φ' を求める．

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\frac{5}{2\cos x + 3} = 5\frac{d}{dx}\frac{1}{2\cos x + 3} \\
&= 5\frac{-\dfrac{d}{dx}(2\cos x + 3)}{(2\cos x + 3)^2} = 5\frac{-2(-\sin x)}{(2\cos x + 3)^2} \\
&= \frac{10\sin x}{(2\cos x + 3)^2} \ .
\end{aligned}$$

別の公式を用いても計算できる．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{5}{2\cos x + 3}$ と定める．関数 φ の導関数 φ' を求める．

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\frac{5}{2\cos x + 3}$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{5}{2\cos x + 3}$ と定める．関数 φ の導関数 φ' を求める．

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\frac{5}{2\cos x + 3} \\
&= \frac{\dfrac{d}{dx}5\cdot(2\cos x + 3) - 5\dfrac{d}{dx}(2\cos x + 3)}{(2\cos x + 3)^2} \\
&= \frac{0 - 5\cdot 2(-\sin x)}{(2\cos x + 3)^2} \qquad \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{d}{dx}f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot\dfrac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{10\sin x}{(2\cos x + 3)^2} \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問3.3.2}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{2}{3\sin x + 4}$ と定める．関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ．

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\frac{2}{3\sin x + 4} =$$

$\boxed{問3.3.2}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{2}{3\sin x + 4}$ と定める．関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ．

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{d}{dx}\frac{2}{3\sin x + 4} = -\frac{2\dfrac{d}{dx}(3\sin x + 4)}{(3\sin x + 4)^2} = -\frac{2\cdot 3\dfrac{d}{dx}\sin x}{(3\sin x + 4)^2} \\ &= -\frac{6\cos x}{(3\sin x + 4)^2} \ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t の関数 $x = \dfrac{\sin t}{t^3}$ を微分する.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\sin t}{t^3}$$

$\boxed{例}$ 変数 t の関数 $x=\dfrac{\sin t}{t^3}$ を微分する.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\sin t}{t^3}=\frac{\dfrac{d}{dt}\sin t\cdot t^3-\sin t\cdot\dfrac{d}{dt}t^3}{(t^3)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\dfrac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot\dfrac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$$

$\boxed{例}$ 変数 t の関数 $x = \dfrac{\sin t}{t^3}$ を微分する.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\sin t}{t^3} = \frac{\dfrac{d}{dt}\sin t \cdot t^3 - \sin t \cdot \dfrac{d}{dt}t^3}{(t^3)^2} = \frac{\cos t \cdot t^3 - \sin t \cdot 3t^2}{t^6}$$

例 変数 t の関数 $x = \dfrac{\sin t}{t^3}$ を微分する.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\sin t}{t^3} = \frac{\dfrac{d}{dt}\sin t \cdot t^3 - \sin t \cdot \dfrac{d}{dt}t^3}{(t^3)^2} = \frac{\cos t \cdot t^3 - \sin t \cdot 3t^2}{t^6}$$

$$= \frac{t\cos t - 3\sin t}{t^4} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}3.3.3}$ 変数 u の関数 $v = \dfrac{\cos u}{u^4}$ を微分せよ.

$$\frac{dv}{du} = \frac{d}{du}\frac{\cos u}{u^4} =$$

$\boxed{\text{問}3.3.3}$ 変数 u の関数 $v = \dfrac{\cos u}{u^4}$ を微分せよ.

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \frac{d}{du}\frac{\cos u}{u^4} = \frac{\dfrac{d}{du}\cos u \cdot u^4 - \cos u \cdot \dfrac{d}{du}u^4}{(u^4)^2} \\ &= \frac{-\sin u \cdot u^4 - \cos u \cdot 4u^3}{u^8} \\ &= -\frac{u \sin u + 4\cos u}{u^5} \quad .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 u の関数 $\dfrac{4u-5}{u^2+3}$ を微分する.

例 変数 u の関数 $\dfrac{4u-5}{u^2+3}$ を微分する.

$$\frac{d}{du}\frac{4u-5}{u^2+3} = \frac{\dfrac{d}{du}(4u-5)\cdot(u^2+3)-(4u-5)\dfrac{d}{du}(u^2+3)}{(u^2+3)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot\dfrac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 u の関数 $\dfrac{4u-5}{u^2+3}$ を微分する.

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\frac{4u-5}{u^2+3} &= \frac{\dfrac{d}{du}(4u-5)\cdot(u^2+3)-(4u-5)\dfrac{d}{du}(u^2+3)}{(u^2+3)^2}\\ &= \frac{4(u^2+3)-(4u-5)\cdot 2u}{(u^2+3)^2}\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 変数 u の関数 $\dfrac{4u-5}{u^2+3}$ を微分する.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}\frac{4u-5}{u^2+3} &= \frac{\dfrac{d}{du}(4u-5)\cdot(u^2+3)-(4u-5)\dfrac{d}{du}(u^2+3)}{(u^2+3)^2} \\
&= \frac{4(u^2+3)-(4u-5)\cdot 2u}{(u^2+3)^2} \\
&= \frac{4u^2+12-8u^2+10u}{(u^2+3)^2} \\
&= \frac{-4u^2+10u+12}{(u^2+3)^2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 u の関数 $\dfrac{4u-5}{u^2+3}$ を微分する.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}\frac{4u-5}{u^2+3} &= \frac{\dfrac{d}{du}(4u-5)\cdot(u^2+3)-(4u-5)\dfrac{d}{du}(u^2+3)}{(u^2+3)^2} \\
&= \frac{4(u^2+3)-(4u-5)\cdot 2u}{(u^2+3)^2} \\
&= \frac{4u^2+12-8u^2+10u}{(u^2+3)^2} \\
&= \frac{-4u^2+10u+12}{(u^2+3)^2} \\
&= -\frac{4u^2-10u-12}{(u^2+3)^2} \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}3.3.4}$ 変数 x の関数 $y = \dfrac{5x-3}{x^2-4}$ を微分せよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{5x-3}{x^2-4} =$$

$\boxed{問3.3.4}$ 変数 x の関数 $y = \dfrac{5x-3}{x^2-4}$ を微分せよ.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\frac{5x-3}{x^2-4} = \frac{\dfrac{d}{dx}(5x-3)\cdot(x^2-4)-(5x-3)\dfrac{d}{dx}(x^2-4)}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{5(x^2-4)-(5x-3)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} \\ &= -\frac{5x^2-6x+20}{(x^2-4)^2} \quad .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \ln x$ と定める．自然対数の底 e に対して，e^3 における f の微分係数を求める．

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \ln x$ と定める．自然対数の底 e に対して，e^3 における f の微分係数を求める．e^3 における f の微分係数は，e^3 における f の導関数 f' の値 $f'(e^3)$ である．

関数 f の定義域の実数 a における微分係数は f の導関数 f' の a における値 $f'(a)$ である．

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=x^2\ln x$ と定める．自然対数の底 e に対して，e^3 における f の微分係数を求める．e^3 における f の微分係数は，e^3 における f の導関数 f' の値 $f'(e^3)$ である．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^2\ln x)=\frac{d}{dx}x^2\cdot\ln x+x^2\frac{d}{dx}\ln x$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)$$

$\boxed{例}$ 正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=x^2\ln x$ と定める．自然対数の底 e に対して，e^3 における f の微分係数を求める．e^3 における f の微分係数は，e^3 における f の導関数 f' の値 $f'(e^3)$ である．

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2\ln x) = \frac{d}{dx}x^2\cdot\ln x + x^2\frac{d}{dx}\ln x = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} \\ &= x(1+2\ln x)\ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=x^2\ln x$ と定める．自然対数の底 e に対して，e^3 における f の微分係数を求める．e^3 における f の微分係数は，e^3 における f の導関数 f' の値 $f'(e^3)$ である．

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2\ln x) = \frac{d}{dx}x^2\cdot\ln x + x^2\frac{d}{dx}\ln x = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} \\ &= x(1+2\ln x)\ . \end{aligned}$$

e^3 における f の微分係数は，

$$f'(e^3) = e^3(1+2\ln e^3) = e^3(1+2\cdot 3) = 7e^3\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問3.3.5}$ 正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3\ln x$ と定める．自然対数の底 e に対して，e^4 における f の微分係数を求めよ．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^3\ln x)=$$

$\boxed{問3.3.5}$ 正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3\ln x$ と定める．自然対数の底 e に対して，e^4 における f の微分係数を求めよ．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^3\ln x)=\frac{d}{dx}x^3\cdot\ln x+x^3\frac{d}{dx}\ln x=3x^2\ln x+x^3\frac{1}{x}$$
$$=x^2(1+3\ln x)\ .$$

e^4 における f の微分係数は，

$$f'(e^4)=$$

$\boxed{問3.3.5}$ 正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3\ln x$ と定める．自然対数の底 e に対して，e^4 における f の微分係数を求めよ．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^3\ln x)=\frac{d}{dx}x^3\cdot\ln x+x^3\frac{d}{dx}\ln x=3x^2\ln x+x^3\frac{1}{x}$$
$$=x^2(1+3\ln x)\ .$$

e^4 における f の微分係数は，

$$f'(e^4)=(e^4)^2(1+3\ln e^4)=e^8(1+3\cdot 4)=13e^8\ .$$

$\boxed{終}$