3.1 導関数

$\boxed{\text{例}}$ 関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定める．実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である．

$\boxed{例}$ 関数 φ を $\varphi(x)=x^3$ と定める．実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である．例えば，

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3\cdot 2^2=12\ ,$$
$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3\cdot 5^2=75\ ,$$
$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3\cdot (-4)^2=48\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 関数 φ を $\varphi(x)=x^3$ と定める．実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である．例えば，

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3\cdot 2^2 = 12 \text{ ，}$$
$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3\cdot 5^2 = 75 \text{ ，}$$
$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3\cdot(-4)^2 = 48 \text{ ．}$$

実数 x に対して，x における φ の微分係数 $3x^2$ が唯一つに定まる．

$\boxed{例}$ 関数 φ を $\varphi(x)=x^3$ と定める．実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である．例えば，

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3\cdot 2^2 = 12 \text{ ,}$$
$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3\cdot 5^2 = 75 \text{ ,}$$
$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3\cdot(-4)^2 = 48 \text{ .}$$

実数 x に対して，x における φ の微分係数 $3x^2$ が唯一つに定まる．よって

$$x \text{ に対して } x \text{ における } \varphi \text{ の微分係数 } 3x^2 \text{ を定める 関数}$$

ができる．

$\boxed{\text{例}}$ 関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定める．実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である．例えば，

2 における φ の微分係数は $3 \cdot 2^2 = 12$ ，

5 における φ の微分係数は $3 \cdot 5^2 = 75$ ，

-4 における φ の微分係数は $3 \cdot (-4)^2 = 48$ ．

実数 x に対して，x における φ の微分係数 $3x^2$ が唯一つに定まる．よって

x に対して x における φ の微分係数 $3x^2$ を定める 関数

ができる．この関数を φ の導関数といい，φ' と書き表す．

$\boxed{\text{例}}$ 関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定める．実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である．例えば，

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 2^2 = 12 \text{ ,}$$

$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 5^2 = 75 \text{ ,}$$

$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot (-4)^2 = 48 \text{ .}$$

実数 x に対して，x における φ の微分係数 $3x^2$ が唯一つに定まる．よって

x に対して　x における φ の微分係数 $3x^2$ を定める 関数

ができる．この関数を φ の導関数といい，φ' と書き表す．φ の導関数 φ' の値 $\varphi'(x)$ は x における φ の微分係数 $3x^2$ なので，$\varphi'(x) = 3x^2$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定める．実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である．例えば，

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 2^2 = 12 \text{ ，}$$

$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 5^2 = 75 \text{ ，}$$

$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot (-4)^2 = 48 \text{ ．}$$

実数 x に対して，x における φ の微分係数 $3x^2$ が唯一つに定まる．よって

$$x \text{ に対して } x \text{ における } \varphi \text{ の微分係数 } 3x^2 \text{ を定める 関数}$$

ができる．この関数を φ の導関数といい，φ' と書き表す．φ の導関数 φ' の値 $\varphi'(x)$ は x における φ の微分係数 $3x^2$ なので，$\varphi'(x) = 3x^2$ ．例えば次のようになる：

2 における導関数 φ' の値 $\varphi'(2) = 12$ は 2 における φ の微分係数である；

5 における導関数 φ' の値 $\varphi'(5) = 75$ は 5 における φ の微分係数である．

$\boxed{\text{例}}$ 関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定める．実数 a における φ の微分係数は $3a^2$ である．例えば，

$$2 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 2^2 = 12 \text{ ，}$$

$$5 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot 5^2 = 75 \text{ ，}$$

$$-4 \text{ における } \varphi \text{ の微分係数は } 3 \cdot (-4)^2 = 48 \text{ ．}$$

実数 x に対して，x における φ の微分係数 $3x^2$ が唯一つに定まる．よって

$$x \text{ に対して } x \text{ における } \varphi \text{ の微分係数 } 3x^2 \text{ を定める 関数}$$

ができる．この関数を φ の導関数といい，φ' と書き表す．φ の導関数 φ' の値 $\varphi'(x)$ は x における φ の微分係数 $3x^2$ なので，$\varphi'(x) = 3x^2$ ．例えば次のようになる：

2 における導関数 φ' の値 $\varphi'(2) = 12$ は 2 における φ の微分係数である；
5 における導関数 φ' の値 $\varphi'(5) = 75$ は 5 における φ の微分係数である．
このように，導関数とは微分係数を計算するための関数である． $\boxed{\text{終}}$

一般的に述べる．関数 f の定義域の実数 x に対して，x における f の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は（あるならば）唯一つに定まる．

一般的に述べる．関数 f の定義域の実数 x に対して，x における f の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は（あるならば）唯一つに定まる．従って，

x に対して　x における f の微分係数を定める 関数

を定義できる．この関数を f の導関数という．

一般的に述べる．関数 f の定義域の実数 x に対して，x における f の微分係数 $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は（あるならば）唯一つに定まる．従って，

x に対して x における f の微分係数を定める 関数

を定義できる．この関数を f の導関数という．

[定義] 関数 f の導関数とは，f の定義域の実数 x に対して x における f の微分係数を定める関数のことである．関数 f の導関数を f' と書き表す．

一般的に述べる．関数 f の定義域の実数 x に対して，x における f の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は（あるならば）唯一つに定まる．従って，

x に対して　x における f の微分係数を定める 関数

を定義できる．この関数を f の導関数という．

[定義] 関数 f の導関数とは，f の定義域の実数 x に対して x における f の微分係数を定める関数のことである．関数 f の導関数を f' と書き表す．

関数 f の導関数 f' の実数 x における値 $f'(x)$ は x における f の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ である，

一般的に述べる．関数 f の定義域の実数 x に対して，x における f の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は（あるならば）唯一つに定まる．従って，

x に対して　x における f の微分係数を定める 関数

を定義できる．この関数を f の導関数という．

[定義] 関数 f の導関数とは，f の定義域の実数 x に対して x における f の微分係数を定める関数のことである．関数 f の導関数を f' と書き表す．

関数 f の導関数 f' の実数 x における値 $f'(x)$ は x における f の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ である，つまり

$$f'(x) = 〔\, f \text{ の } x \text{ における微分係数}〕= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ .$$

一般的に述べる．関数 f の定義域の実数 x に対して，x における f の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は（あるならば）唯一つに定まる．従って，

x に対して　x における f の微分係数を定める 関数

を定義できる．この関数を f の導関数という．

[定義] 関数 f の導関数とは，f の定義域の実数 x に対して x における f の微分係数を定める関数のことである．関数 f の導関数を f' と書き表す．

関数 f の導関数 f' の実数 x における値 $f'(x)$ は x における f の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ である，つまり

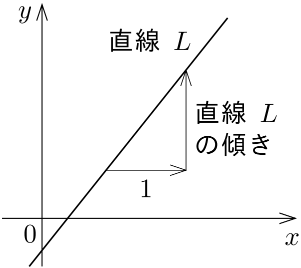
$$f'(x) = \text{〔}\, f \text{ の } x \text{ における微分係数〕} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ .$$

関数 f の導関数を求めることを，f を微分するという．

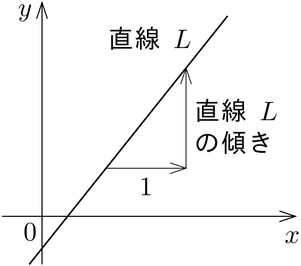
関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ は，x における f の微分係数なので，f のグラフの点 $\bigl(x, f(x)\bigr)$ における　　　　　　　　　　である．

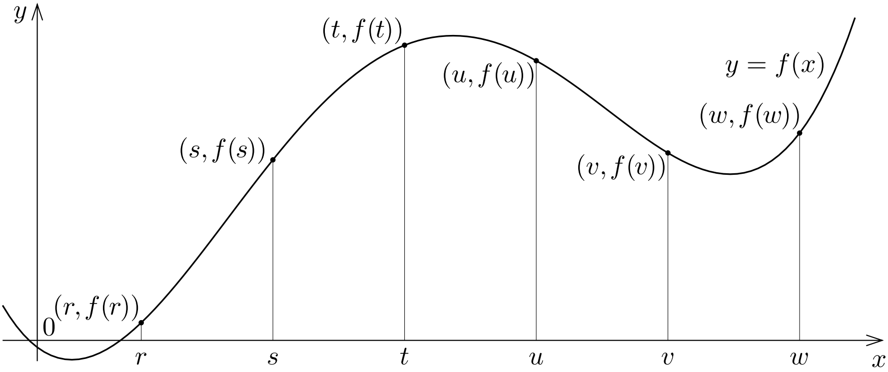
関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ は，x における f の微分係数なので，f のグラフの点 $\big(x, f(x)\big)$ における接線の傾きである．

関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ は，x における f の微分係数なので，f のグラフの点 $\bigl(x, f(x)\bigr)$ における接線の傾きである．xy 座標平面における直線の傾きは，右図のように，x 座標を 1 だけ大きくするとき y 座標が大きくなる量である．

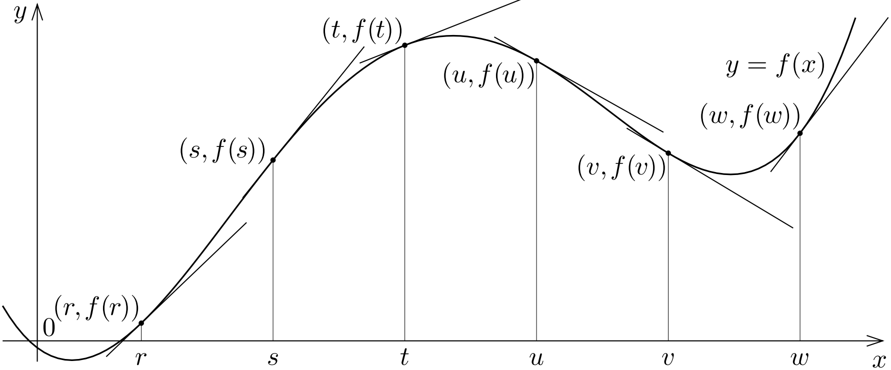


関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ は，x における f の微分係数なので，f のグラフの点 $\big(x, f(x)\big)$ における接線の傾きである．xy 座標平面における直線の傾きは，右図のように，x 座標を 1 だけ大きくするとき y 座標が大きくなる量である．このことより，関数 f のグラフに対する導関数 f' のグラフは例えば次のようになる．

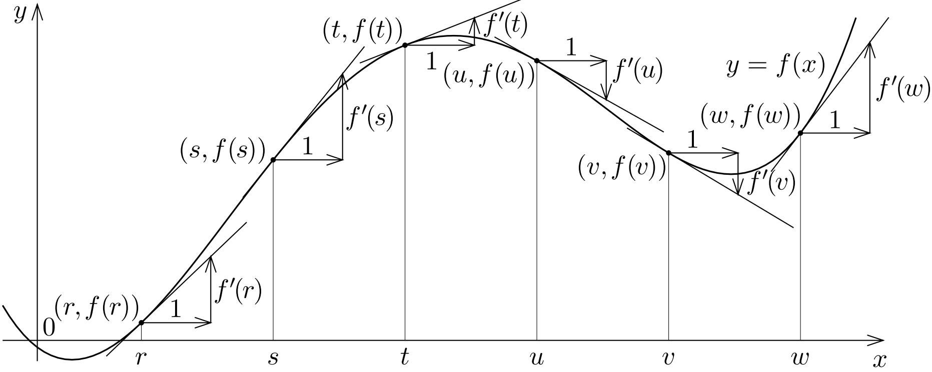




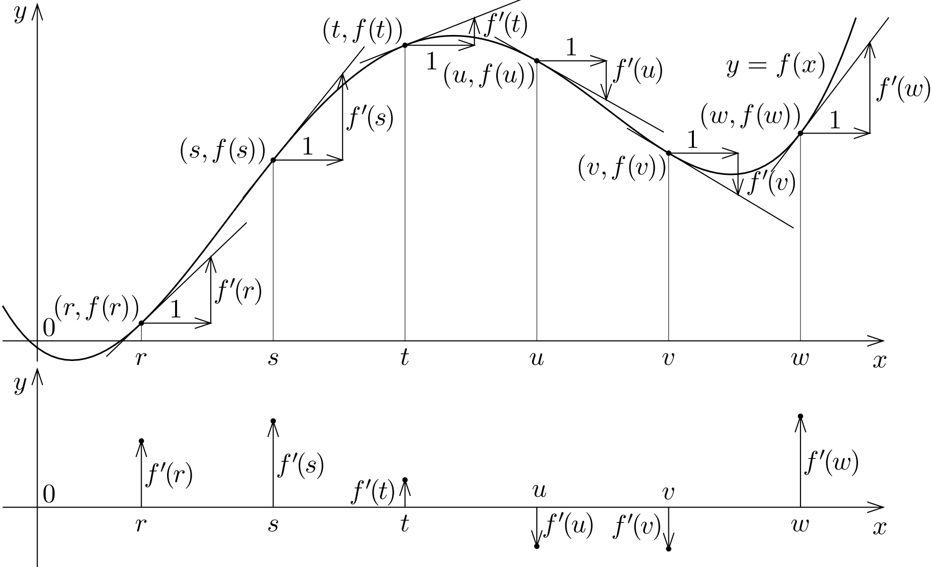
y
$(t, f(t))$
$(u, f(u))$
$y = f(x)$
$(w, f(w))$
$(s, f(s))$
$(v, f(v))$
$(r, f(r))$
0
r
s
t
u
v
w
x



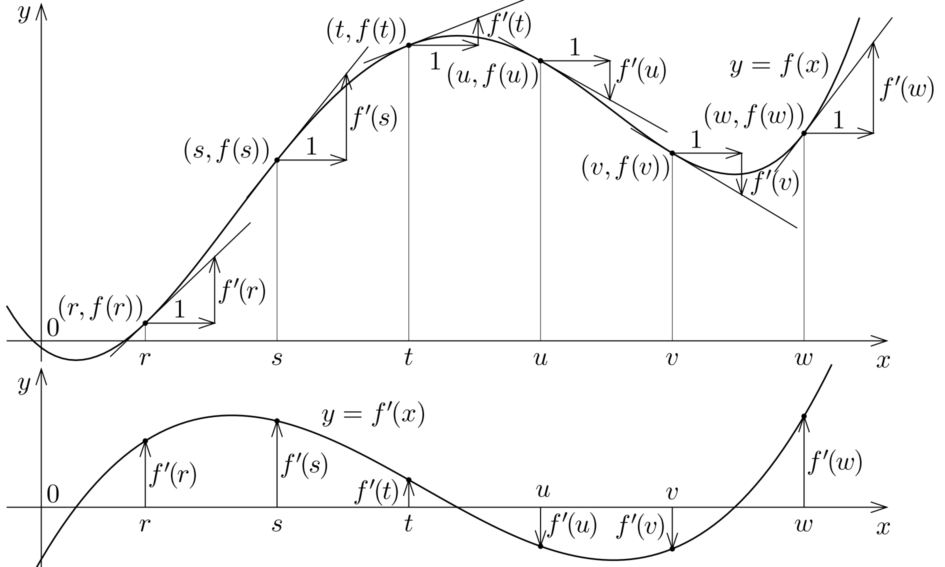
y
$(t, f(t))$
$(u, f(u))$
$y = f(x)$
$(w, f(w))$
$(s, f(s))$
$(v, f(v))$
$(r, f(r))$
0
r
s
t
u
v
w
x



y
(t, f(t))
f′(t)
1
1
(u, f(u))
f′(u)
y = f(x)
f′(w)
f′(s)
(w, f(w))
1
(s, f(s))
1
1
(v, f(v))
f′(v)
f′(r)
(r, f(r))
1
0
r
s
t
u
v
w
x



y
(t, f(t))
f′(t)
1
(u, f(u))
1
f′(u)
y = f(x)
f′(w)
(w, f(w))
1
f′(s)
(s, f(s))
1
(v, f(v))
1
f′(v)
f′(r)
(r, f(r))
1
0
r
s
t
u
v
w
x
y
f′(r)
f′(s)
f′(t)
f′(w)
0
u
v
r
s
t
w
x
f′(u)
f′(v)



y
(t, f(t))
f′(t)
1
(u, f(u))
1
f′(u)
y = f(x)
f′(w)
f′(s)
(w, f(w))
1
(s, f(s))
1
1
(v, f(v))
f′(v)
f′(r)
(r, f(r))
0
1
r
s
t
u
v
w
x
y
y = f′(x)
f′(r)
f′(s)
f′(t)
f′(w)
0
u
v
r
s
t
w
x
f′(u)
f′(v)

微分可能な関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ を，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ ，$\dfrac{df(x)}{dx}$ などとも書き表す；

微分可能な関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ を，$\frac{d}{dx}f(x)$ ，$\frac{df(x)}{dx}$ などとも書き表す；

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \;;$$

微分可能な関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ を，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ ，$\dfrac{df(x)}{dx}$ などとも書き表す；

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \ ;$$

つまり，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ は $f(x)$ を微分した結果を表す.

微分可能な関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ を，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ ，$\dfrac{df(x)}{dx}$ などとも書き表す；

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \ ;$$

つまり，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ は $f(x)$ を微分した結果を表す.

関数 $f(x)$ の導関数の表現 $\dfrac{d}{dx}f(x)$ において，$\dfrac{d}{dx}$ は $f(x)$ を変数 x の関数として微分することを表す.

微分可能な関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ を，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ ，$\dfrac{df(x)}{dx}$ などとも書き表す；

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \ ;$$

つまり，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ は $f(x)$ を微分した結果を表す.

関数 $f(x)$ の導関数の表現 $\dfrac{d}{dx}f(x)$ において，$\dfrac{d}{dx}$ は $f(x)$ を変数 x の関数として微分することを表す．例えば，

変数 y の冪関数 y^4 の導関数を $\dfrac{d}{dy}y^4$ と書き表し，

変数 t の正弦関数 $\sin t$ の導関数を $\dfrac{d}{dt}\sin t$ と書き表し，

変数 u の対数関数 $\ln u = \log_e u$ の導関数を $\dfrac{d}{du}\ln u$ と書き表す.

[定理 **2.5.1**] 定数 n が正の整数であるとき，各実数 x における冪関数 x^n の微分係数は

$$\lim_{t\to x}\frac{t^n-x^n}{t-x} = nx^{n-1} \quad .$$

[定理 **2.5.1**] 定数 n が正の整数であるとき，各実数 x における冪関数 x^n の微分係数は

$$\lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = nx^{n-1} \quad .$$

定数 n が正の整数であるとき，n を指数とする冪関数 x^n の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^n$ の値は x^n の微分係数 nx^{n-1} なので，

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad .$$

[定理 **2.5.1**]　定数 n が正の整数であるとき，各実数 x における冪関数 x^n の微分係数は

$$\lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = nx^{n-1} \ .$$

定数 n が正の整数であるとき，n を指数とする冪関数 x^n の導関数 $\frac{d}{dx}x^n$ の値は x^n の微分係数 nx^{n-1} なので，

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \ .$$

[公式]　正の整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \ .$$

[定理 **2.5.1**] 定数 n が正の整数であるとき，各実数 x における冪関数 x^n の微分係数は

$$\lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = nx^{n-1} \ .$$

定数 n が正の整数であるとき，n を指数とする冪関数 x^n の導関数 $\frac{d}{dx}x^n$ の値は x^n の微分係数 nx^{n-1} なので，

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \ .$$

[公式] 正の整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \ .$$

例えば次のようになる：

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2 \ , \qquad \frac{d}{dt}t^5 = 5t^4 \ , \qquad \frac{d}{dy}y^2 = 2y^1 = 2y \ .$$

[定理 **2.5.1**]　定数 n が正の整数であるとき，各実数 x における冪関数 x^n の微分係数は

$$\lim_{t\to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = nx^{n-1} \ .$$

定数 n が正の整数であるとき，n を指数とする冪関数 x^n の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^n$ の値は x^n の微分係数 nx^{n-1} なので，

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \ .$$

[公式]　正の整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \ .$$

例えば次のようになる：

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2 \ , \qquad \frac{d}{dt}t^5 = 5t^4 \ , \qquad \frac{d}{dy}y^2 = 2y^1 = 2y \ .$$

特に，$x = x^1$ なので，

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}x^1 = 1x^0 = 1 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 4 を指数とする冪関数 x^4 を f とおく：$f(x) = x^4$．-3 における f の微分係数を求める．

例　4 を指数とする冪関数 x^4 を f とおく：$f(x) = x^4$．-3 における f の微分係数を求める．-3 における f の微分係数は，-3 における f の導関数 f' の値 $f'(-3)$ である．

関数 f の定義域の実数 a における微分係数は f の導関数 f' の a における値 $f'(a)$ である．

$\boxed{例}$ 4 を指数とする冪関数 x^4 を f とおく：$f(x) = x^4$ ．-3 における f の微分係数を求める．-3 における f の微分係数は，-3 における f の導関数 f' の値 $f'(-3)$ である．

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} x^4 = 4x^3 \ .$$

例 4 を指数とする冪関数 x^4 を f とおく：$f(x)=x^4$ ．-3 における f の微分係数を求める．-3 における f の微分係数は，-3 における f の導関数 f' の値 $f'(-3)$ である．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^4 = 4x^3 \ .$$

-3 における f の微分係数は

$$f'(-3) = 4(-3)^3 = -108 \ .$$

終

$\boxed{問 3.1.1}$ 5 を指数とする冪関数 x^5 を g とおく：$g(x) = x^5$ ．-2 における g の微分係数を求めよ.

関数 g の導関数 g' は

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}x^5 =$$

-2 における g の微分係数は,

$$g'(-2) =$$

$\boxed{問3.1.1}$ 5 を指数とする冪関数 x^5 を g とおく：$g(x) = x^5$ ．-2 における g の微分係数を求めよ．

関数 g の導関数 g' は

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}x^5 = 5x^4 \ .$$

-2 における g の微分係数は，

$$g'(-2) = 5(-2)^4 = 80 \ .$$

$\boxed{終}$

[定理 **2.5.2**] 定数関数の微分係数は 0 である.

[定理 **2.5.2**] 定数関数の微分係数は 0 である.

変数 x に無関係な定数 k に対して, $f(x) = k$ である定数関数 $f(x)$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}f(x)$ の値は $f(x)$ の微分係数 0 なので,

$$\frac{d}{dx}k = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = 0 \ .$$

[定理 **2.5.2**] 定数関数の微分係数は 0 である.

変数 x に無関係な定数 k に対して, $f(x) = k$ である定数関数 $f(x)$ の導関数 $\dfrac{d}{dx} f(x)$ の値は $f(x)$ の微分係数 0 なので,

$$\frac{d}{dx} k = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = 0 \ .$$

[公式] 変数 x に無関係な定数 k に対して, 定数関数 k の導関数は

$$\frac{d}{dx} k = 0 \ .$$

[定理 2.5.2] 定数関数の微分係数は 0 である.

変数 x に無関係な定数 k に対して, $f(x) = k$ である定数関数 $f(x)$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}f(x)$ の値は $f(x)$ の微分係数 0 なので,

$$\frac{d}{dx}k = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = 0 \ .$$

[公式] 変数 x に無関係な定数 k に対して, 定数関数 k の導関数は

$$\frac{d}{dx}k = 0 \ .$$

例えば次のようになる:

$$\frac{d}{dx}6 = 0 \ , \qquad \frac{d}{dt}5^3 = 0 \ , \qquad \frac{d}{dy}\ln 7 = 0 \ .$$

[定理 **2.8**]　任意の実数 x に対して，x における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x \ ,$$

x における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\sin x \ .$$

[定理 **2.8**] 任意の実数 x に対して，x における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x ,$$

x における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\sin x .$$

正弦関数 $\sin x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\sin x$ の値は $\sin x$ の微分係数 $\cos x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x .$$

余弦関数 $\cos x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\cos x$ の値は $\cos x$ の微分係数 $-\sin x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x .$$

[定理 **2.8**]　任意の実数 x に対して，x における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x \ ,$$

x における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\sin x \ .$$

正弦関数 $\sin x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\sin x$ の値は $\sin x$ の微分係数 $\cos x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \ .$$

余弦関数 $\cos x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\cos x$ の値は $\cos x$ の微分係数 $-\sin x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \ .$$

[公式]　正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ の導関数は，それぞれ，

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \ , \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \ .$$

$\boxed{例}$ 正弦関数 $\sin x$ を f とおく：$f(x) = \sin x$. $\dfrac{2\pi}{3}$ における f の微分係数を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 正弦関数 $\sin x$ を f とおく：$f(x) = \sin x$ ．$\dfrac{2\pi}{3}$ における f の微分係数を求める．$\dfrac{2\pi}{3}$ における f の微分係数は，$\dfrac{2\pi}{3}$ における f' の値 $f'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ である．

関数 f の定義域の実数 a における微分係数は f の導関数 f' の a における値 $f'(a)$ である．

例 正弦関数 $\sin x$ を f とおく： $f(x) = \sin x$ ． $\dfrac{2\pi}{3}$ における f の微分係数を求める． $\dfrac{2\pi}{3}$ における f の微分係数は， $\dfrac{2\pi}{3}$ における f' の値 $f'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ である．

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 正弦関数 $\sin x$ を f とおく：$f(x) = \sin x$ ． $\dfrac{2\pi}{3}$ における f の微分係数を求める． $\dfrac{2\pi}{3}$ における f の微分係数は， $\dfrac{2\pi}{3}$ における f' の値 $f'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ である．

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \ .$$

$\dfrac{2\pi}{3}$ における f の微分係数は

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 余弦関数 $\cos x$ を g とおく：$g(x) = \cos x$ ． $\dfrac{5\pi}{6}$ における g の微分係数を求める．

$\boxed{\text{例}}$ 余弦関数 $\cos x$ を g とおく：$g(x) = \cos x$ ． $\dfrac{5\pi}{6}$ における g の微分係数を求める． $\dfrac{5\pi}{6}$ における g の微分係数は， $\dfrac{5\pi}{6}$ における g' の値 $g'\!\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ である．

関数 f の定義域の実数 a における微分係数は f の導関数 f' の a における値 $f'(a)$ である．

$\boxed{例}$ 余弦関数 $\cos x$ を g とおく：$g(x) = \cos x$ ． $\frac{5\pi}{6}$ における g の微分係数を求める． $\frac{5\pi}{6}$ における g の微分係数は， $\frac{5\pi}{6}$ における g' の値 $g'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ である．

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \ .$$

例 余弦関数 $\cos x$ を g とおく： $g(x) = \cos x$ ． $\dfrac{5\pi}{6}$ における g の微分係数を求める． $\dfrac{5\pi}{6}$ における g の微分係数は， $\dfrac{5\pi}{6}$ における g' の値 $g'\Big(\dfrac{5\pi}{6}\Big)$ である．

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \ .$$

$\dfrac{5\pi}{6}$ における g の微分係数は

$$g'\Big(\frac{5\pi}{6}\Big) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\sin\Big(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\Big) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \ .$$

終

$\boxed{問3.1.2}$ 正弦関数 $\sin x$ を g とおく．関数 g の導関数を求めて，g の $\dfrac{5\pi}{3}$ における微分係数を求めよ．

関数 g の導関数は $g'(x) =$ 　　　．g の $\dfrac{5\pi}{3}$ における微分係数は

$$g'\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$$

$\boxed{問 3.1.2}$ 正弦関数 $\sin x$ を g とおく．関数 g の導関数を求めて，g の $\dfrac{5\pi}{3}$ における微分係数を求めよ．

関数 g の導関数は $g'(x) = \cos x$ ．g の $\dfrac{5\pi}{3}$ における微分係数は

$$g'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{3} = -\cos\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問 3.1.3}$ 余弦関数 $\cos x$ を f とおく．関数 f の導関数を求めて，f の $\frac{11\pi}{6}$ における微分係数を求めよ．

関数 f の導関数は $f'(x) =$ ．f の $\frac{11\pi}{6}$ における微分係数は

$$f'\left(\frac{11\pi}{6}\right) =$$

$\boxed{問3.1.3}$ 余弦関数 $\cos x$ を f とおく．関数 f の導関数を求めて，f の $\dfrac{11\pi}{6}$ における微分係数を求めよ．

関数 f の導関数は $f'(x) = -\sin x$ ．f の $\dfrac{11\pi}{6}$ における微分係数は

$$f'\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\frac{11\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ .$$

$\boxed{終}$

[定理 **2.9**] 実数 a について $a > 0$ ，$a \neq 0$ とする．正の実数 x に対して，a を底とする対数関数 $\log_a x$ の x における微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{\log_a e}{x} \ .$$

自然対数の底 e を底とする対数関数 $\ln x = \log_e x$ の x における微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x} \ .$$

[定理 **2.9**] 実数 a について $a>0$ ，$a\neq 0$ とする．正の実数 x に対して，a を底とする対数関数 $\log_a x$ の x における微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \frac{\log_a e}{x} .$$

自然対数の底 e を底とする対数関数 $\ln x=\log_e x$ の x における微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{1}{x} .$$

実数 a について $a>0$ ，$a\neq 0$ とする．対数関数 $\log_a x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\log_a x$ の値は $\log_a x$ の微分係数 $\dfrac{\log_a e}{x}$ なので，

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x} .$$

対数関数 $\ln x=\log_e x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\ln x$ の値は $\ln x$ の微分係数 $\dfrac{1}{x}$ なので，

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} .$$

[公式] 定数 a について $a>0$, $a\neq 1$ とする．対数関数 $\log_a x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x\ln a} \quad (x>0) .$$

特に自然対数の対数関数 $\ln x = \log_e x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \quad (x>0) .$$

例 3 を底とする対数関数 $\log_3 x$ を f とおく：$f(x) = \log_3 x$ （ $x > 0$ ）．5 における f の微分係数を求める．

$\boxed{\text{例}}$ 3 を底とする対数関数 $\log_3 x$ を f とおく：$f(x)=\log_3 x$ （ $x>0$ ）．5 における f の微分係数を求める．5 における f の微分係数は，5 における f の導関数 f' の値 $f'(5)$ である．

関数 f の定義域の実数 a における微分係数は f の導関数 f' の a における値 $f'(a)$ である．

$\boxed{\text{例}}$ 3 を底とする対数関数 $\log_3 x$ を f とおく：$f(x) = \log_3 x$ （ $x > 0$ ）．5 における f の微分係数を求める．5 における f の微分係数は，5 における f の導関数 f' の値 $f'(5)$ である．

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \log_3 x = \frac{\log_3 e}{x} = \frac{1}{x \ln 3} \ .$$

例 3 を底とする対数関数 $\log_3 x$ を f とおく：$f(x) = \log_3 x$ （$x > 0$）．5 における f の微分係数を求める．5 における f の微分係数は，5 における f の導関数 f' の値 $f'(5)$ である．

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \log_3 x = \frac{\log_3 e}{x} = \frac{1}{x \ln 3} \ .$$

5 における f の微分係数は

$$f'(5) = \frac{\log_3 e}{5} = \frac{1}{5 \ln 3} \ .$$

終

$\boxed{問3.1.4}$ 5 を底とする対数関数 $\log_5 x$ を g とおく：$g(x) = \log_5 x$ （ $x > 0$ ）．関数 g の導関数 g' を求めて，7 における g の微分係数を求めよ．

関数 $g(x)$ の導関数は

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \log_5 x =$$

$\boxed{問3.1.4}$ 5 を底とする対数関数 $\log_5 x$ を g とおく： $g(x) = \log_5 x$ （ $x > 0$ ）．関数 g の導関数 g' を求めて，7 における g の微分係数を求めよ．

関数 $g(x)$ の導関数は

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \log_5 x = \frac{\log_5 e}{x} = \frac{1}{x \ln 5} \ .$$

7 における g の微分係数は，

$$g'(7) = \frac{\log_5 e}{7} = \frac{1}{7 \ln 5} \ .$$

$\boxed{終}$

関数 f について，独立変数 x の値の変化に対する $f(x)$ の値の変化を考える．

関数 f について，独立変数 x の値の変化に対する $f(x)$ の値の変化を考える．x の値の変化量を x の増分といい $\varDelta x$ と書き表す．独立変数 x の増分 $\varDelta x$ は 0 ではないとする．

関数 f について，独立変数 x の値の変化に対する $f(x)$ の値の変化を考える．x の値の変化量を x の増分といい $\varDelta x$ と書き表す．独立変数 x の増分 $\varDelta x$ は 0 ではないとする．x の増分 $\varDelta x$ に対して，x が $x+\varDelta x$ に変化すると，$f(x)$ は $f(x+\varDelta x)$ に変化する．

関数 f について，独立変数 x の値の変化に対する $f(x)$ の値の変化を考える．x の値の変化量を x の増分といい $\varDelta x$ と書き表す．独立変数 x の増分 $\varDelta x$ は 0 ではないとする．x の増分 $\varDelta x$ に対して，x が $x+\varDelta x$ に変化すると，$f(x)$ は $f(x+\varDelta x)$ に変化する．このとき，$f(x)$ の変化量は $f(x+\varDelta x)-f(x)$ である．

関数 f について，独立変数 x の値の変化に対する $f(x)$ の値の変化を考える．x の値の変化量を x の増分といい $\varDelta x$ と書き表す．独立変数 x の増分 $\varDelta x$ は 0 ではないとする．x の増分 $\varDelta x$ に対して，x が $x+\varDelta x$ に変化すると，$f(x)$ は $f(x+\varDelta x)$ に変化する．このとき，$f(x)$ の変化量は $f(x+\varDelta x)-f(x)$ である．これを，x の増分 $\varDelta x$ に対する $f(x)$ の増分といい，$\varDelta f(x)$ と書き表す：

$$\varDelta f(x) = f(x+\varDelta x)-f(x) \ .$$

$f(x)$ の増分 $\varDelta f(x) = f(x+\varDelta x) - f(x)$ を x の増分 $\varDelta x$ で割ると

$$\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} \;;$$

独立変数 x の増分 $\varDelta x$ は 0 ではない.

$f(x)$ の増分 $\mathit{\Delta} f(x) = f(x+\mathit{\Delta} x) - f(x)$ を x の増分 $\mathit{\Delta} x$ で割ると

$$\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{f(x+\mathit{\Delta} x) - f(x)}{\mathit{\Delta} x} \ ;$$

これは関数 f の平均変化率である.

$f(x)$ の増分 $\mathit{\Delta} f(x) = f(x+\mathit{\Delta} x) - f(x)$ を x の増分 $\mathit{\Delta} x$ で割ると

$$\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{f(x+\mathit{\Delta} x) - f(x)}{\mathit{\Delta} x} \ ;$$

これは関数 f の平均変化率である．ここで $\mathit{\Delta} x \to 0$ とする：

$$\lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{f(x+\mathit{\Delta} x) - f(x)}{\mathit{\Delta} x} \ .$$

$f(x)$ の増分 $\mathit{\Delta} f(x) = f(x+\mathit{\Delta} x) - f(x)$ を x の増分 $\mathit{\Delta} x$ で割ると

$$\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{f(x+\mathit{\Delta} x) - f(x)}{\mathit{\Delta} x} \ ;$$

これは関数 f の平均変化率である．ここで $\mathit{\Delta} x \to 0$ とする：

$$\lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{f(x+\mathit{\Delta} x) - f(x)}{\mathit{\Delta} x} \ .$$

変数 $\mathit{\Delta} x$ を変数 h で置き換えると

$$\lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{f(x+\mathit{\Delta} x) - f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ .$$

$f(x)$ の増分 $\mathit{\Delta} f(x)=f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x)$ を x の増分 $\mathit{\Delta} x$ で割ると

$$\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \frac{f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x)}{\mathit{\Delta} x} \ ;$$

これは関数 f の平均変化率である．ここで $\mathit{\Delta} x \to 0$ とする：

$$\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x)}{\mathit{\Delta} x} \ .$$

変数 $\mathit{\Delta} x$ を変数 h で置き換えると

$$\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{f(x+\mathit{\Delta} x)-f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ .$$

これは，関数 f の なので，

$f(x)$ の増分 $\varDelta f(x) = f(x + \varDelta x) - f(x)$ を x の増分 $\varDelta x$ で割ると

$$\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} \ ;$$

これは関数 f の平均変化率である．ここで $\varDelta x \to 0$ とする：

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} \ .$$

変数 $\varDelta x$ を変数 h で置き換えると

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \ .$$

これは，関数 f の微分係数なので，

$f(x)$ の増分 $\varDelta f(x) = f(x+\varDelta x) - f(x)$ を x の増分 $\varDelta x$ で割ると

$$\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} \ ;$$

これは関数 f の平均変化率である．ここで $\varDelta x \to 0$ とする：

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} \ .$$

変数 $\varDelta x$ を変数 h で置き換えると

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ .$$

これは，関数 f の微分係数なので，f の導関数 f' の値 $f'(x)$ である．

$f(x)$ の増分 $\varDelta f(x) = f(x+\varDelta x) - f(x)$ を x の増分 $\varDelta x$ で割ると

$$\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} \ ;$$

これは関数 f の平均変化率である．ここで $\varDelta x \to 0$ とする：

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} \ .$$

変数 $\varDelta x$ を変数 h で置き換えると

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ .$$

これは，関数 f の微分係数なので，f の導関数 f' の値 $f'(x)$ である．よって

$$\begin{aligned}\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} &= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \\ &= \frac{d}{dx} f(x) \ ,\end{aligned}$$

$f(x)$ の増分 $\varDelta f(x) = f(x+\varDelta x) - f(x)$ を x の増分 $\varDelta x$ で割ると

$$\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} \ ;$$

これは関数 f の平均変化率である．ここで $\varDelta x \to 0$ とする：

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} \ .$$

変数 $\varDelta x$ を変数 h で置き換えると

$$\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ .$$

これは，関数 f の微分係数なので，f の導関数 f' の値 $f'(x)$ である．よって

$$\begin{aligned}\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} &= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \\ &= \frac{d}{dx} f(x) \ ,\end{aligned}$$

つまり $\displaystyle \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}$ ．

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} \quad .$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} \quad .$$

変数 x, y 及び関数 f について $y = f(x)$ のとき， $\mathit{\Delta} y = \mathit{\Delta} f(x)$ なので，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} f(x)}{\mathit{\Delta} x} = \lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} y}{\mathit{\Delta} x} \quad .$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} \ .$$

変数 x, y 及び関数 f について $y = f(x)$ のとき, $\varDelta y = \varDelta f(x)$ なので,

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} \ .$$

これを $\dfrac{dy}{dx}$ とか y' とかと書き表すこともある.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} \ .$$

変数 x, y 及び関数 f について $y = f(x)$ のとき，$\varDelta y = \varDelta f(x)$ なので，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} \ .$$

これを $\dfrac{dy}{dx}$ とか y' とかと書き表すこともある．結局，$y = f(x)$ のとき，

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) \ .$$