

## 2.9 対数関数の微分係数

対数関数の微分係数を調べるために定理を一つ準備する．その証明は省く．

対数関数の微分係数を調べるために定理を一つ準備する. その証明は省く.

[定理] 0 以外の 0 に近い実数を表す変数  $x$  に対して,  $x \rightarrow 0$  のとき  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  はある正の実数に収束する.

対数関数の微分係数を調べるために定理を一つ準備する。その証明は省く。

[定理] 0 以外の 0 に近い実数を表す変数  $x$  に対して、 $x \rightarrow 0$  のとき  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  はある正の実数に収束する。

実際に変数  $x$  の値を 0 に近づけていくときの  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  の値を調べる。

| $x$ の値     | $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値 |
|------------|--------------------------|
| 0.01       | 2.7048138...             |
| 0.0001     | 2.7181459...             |
| 0.000001   | 2.7182805...             |
| 0.00000001 | 2.7182818...             |

| $x$ の値      | $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値 |
|-------------|--------------------------|
| -0.01       | 2.7319990...             |
| -0.0001     | 2.7184178...             |
| -0.000001   | 2.7182832...             |
| -0.00000001 | 2.7182818...             |

精密に計算すると次のようになる：

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots$$

変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  の極限値を  $e$  と書き表す：

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots$$

変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  の極限値を  $e$  と書き表す：

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots$$

この定数  $e$  は自然対数の底といわれ、解析学において大変重要な定数である。

変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  の極限値を  $e$  と書き表す：

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots$$

この定数  $e$  は自然対数の底といわれ、解析学において大変重要な定数である。

自然対数の底  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$  は実数であるが有理数ではない；つまり無理数である。

変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  の極限値を  $e$  と書き表す：

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots$$

この定数  $e$  は自然対数の底といわれ，解析学において大変重要な定数である．自然対数の底  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$  は実数であるが有理数ではない；つまり無理数である．自然対数の底  $e$  の値は約 2.72 と覚えよ．

[定義] 関数  $f$  の定義域の実数  $a$  について,  $h \rightarrow 0$  のとき  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  が収束するならば, 関数  $f$  は  $a$  において微分可能であるといい, 極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  を  $a$  における  $f$  の微分係数という.

[定義] 関数  $f$  の定義域の実数  $a$  について、 $h \rightarrow 0$  のとき  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  が収束するならば、関数  $f$  は  $a$  において微分可能であるといい、極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  を  $a$  における  $f$  の微分係数という。

実数  $a$  について  $a > 0$  ,  $a \neq 1$  とする. 正の実数  $b$  における対数関数  $\log_a x$  の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h}$  を調べる.

[定義] 関数  $f$  の定義域の実数  $a$  について、 $h \rightarrow 0$  のとき  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  が収束するならば、関数  $f$  は  $a$  において微分可能であるといい、極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  を  $a$  における  $f$  の微分係数という。

実数  $a$  について  $a > 0$  ,  $a \neq 1$  とする. 正の実数  $b$  における対数関数  $\log_a x$  の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h}$  を調べる. 対数の性質より

$$\log_a(b+h) - \log_a b = \log_a \frac{b+h}{b} = \log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right) .$$

$$\log_a r - \log_a s = \log_a \frac{r}{s}$$

[定義] 関数  $f$  の定義域の実数  $a$  について、 $h \rightarrow 0$  のとき  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  が収束するならば、関数  $f$  は  $a$  において微分可能であるといい、極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  を  $a$  における  $f$  の微分係数という。

実数  $a$  について  $a > 0$  ,  $a \neq 1$  とする. 正の実数  $b$  における対数関数  $\log_a x$  の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h}$  を調べる. 対数の性質より

$$\log_a(b+h) - \log_a b = \log_a \frac{b+h}{b} = \log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right).$$

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right)}{h}$$

[定義] 関数  $f$  の定義域の実数  $a$  について,  $h \rightarrow 0$  のとき  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  が収束するならば, 関数  $f$  は  $a$  において微分可能であるといい, 極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  を  $a$  における  $f$  の微分係数という.

実数  $a$  について  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  とする. 正の実数  $b$  における対数関数  $\log_a x$  の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h}$  を調べる. 対数の性質より

$$\log_a(b+h) - \log_a b = \log_a \frac{b+h}{b} = \log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right).$$

変数  $t$  を  $t = \frac{h}{b}$  とおく.  $h = bt$  なので,

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right)}{h} = \frac{\log_a(1+t)}{bt} = \frac{1}{b} \frac{1}{t} \log_a(1+t)$$

[定義] 関数  $f$  の定義域の実数  $a$  について、 $h \rightarrow 0$  のとき  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  が収束するならば、関数  $f$  は  $a$  において微分可能であるといい、極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  を  $a$  における  $f$  の微分係数という。

実数  $a$  について  $a > 0$  ,  $a \neq 1$  とする. 正の実数  $b$  における対数関数  $\log_a x$  の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h}$  を調べる. 対数の性質より

$$\log_a(b+h) - \log_a b = \log_a \frac{b+h}{b} = \log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right).$$

変数  $t$  を  $t = \frac{h}{b}$  とおく.  $h = bt$  なので,

$$\begin{aligned} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} &= \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right)}{h} = \frac{\log_a(1+t)}{bt} = \frac{1}{b} \frac{1}{t} \log_a(1+t) \\ &= \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}. \end{aligned}$$

$p \log_a r = \log_a r^p$

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$t = \frac{h}{b}$  で  $b$  は正の定数なので,  $h \rightarrow 0$  のとき,  $t \rightarrow 0$ ,  $t \neq 0$  .

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$t = \frac{h}{b}$  で  $b$  は正の定数なので,  $h \rightarrow 0$  のとき,  $t \rightarrow 0$ ,  $t \neq 0$ . よって,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}$$

[定理 2.3.3] 変数  $x$  の関数  $f(x)$  と変数  $y$  の関数  $g(y)$  について,  
 $f(x) = g(y)$  で, 定数  $a$  と  $b$  について, 変数  $x$  について  $x \rightarrow a$  の  
とき  $y \rightarrow b$ ,  $y \neq b$  とする.  $y \rightarrow b$  のとき  $g(y)$  が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) .$$

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$t = \frac{h}{b}$  で  $b$  は正の定数なので,  $h \rightarrow 0$  のとき,  $t \rightarrow 0$ ,  $t \neq 0$ . よって,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$t = \frac{h}{b}$  で  $b$  は正の定数なので,  $h \rightarrow 0$  のとき,  $t \rightarrow 0$ ,  $t \neq 0$ . よって,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

ここで  $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e > 0$  なので,

$$\frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{b} \log_a \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \log_a e = \frac{\log_a e}{b} .$$

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$t = \frac{h}{b}$  で  $b$  は正の定数なので,  $h \rightarrow 0$  のとき,  $t \rightarrow 0$ ,  $t \neq 0$ . よって,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

ここで  $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e > 0$  なので,

$$\frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{b} \log_a \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \log_a e = \frac{\log_a e}{b} .$$

故に, 対数関数  $\log_a x$  の  $b$  における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b} .$$

自然対数の底  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\dots$  について,  $e > 0$  かつ  $e \neq 1$  なので, 正の各実数  $x$  に対して定数  $e$  を底とする対数  $\log_e x$  を考えることができる.

自然対数の底  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\dots$  について,  $e > 0$  かつ  $e \neq 1$  なので, 正の各実数  $x$  に対して定数  $e$  を底とする対数  $\log_e x$  を考えることができる. 定数  $e$  を底とする対数  $\log_e x$  を自然対数といい,  $\ln x$  と書き表す:

$$\ln x = \log_e x .$$

自然対数の底  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\dots$  について、 $e > 0$  かつ  $e \neq 1$  なので、正の各実数  $x$  に対して定数  $e$  を底とする対数  $\log_e x$  を考えることができる。定数  $e$  を底とする対数  $\log_e x$  を自然対数といい、 $\ln x$  と書き表す：

$$\ln x = \log_e x .$$

対数関数  $\log_a x$  の  $b$  における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b} .$$

自然対数の底  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\dots$  について、 $e > 0$  かつ  $e \neq 1$  なので、正の各実数  $x$  に対して定数  $e$  を底とする対数  $\log_e x$  を考えることができる。定数  $e$  を底とする対数  $\log_e x$  を自然対数といい、 $\ln x$  と書き表す：

$$\ln x = \log_e x .$$

対数関数  $\log_a x$  の  $b$  における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b} .$$

正の実数  $b$  に対して、自然対数の対数関数  $\ln x = \log_e x$  の  $b$  における微分係数は、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(b+h) - \ln b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e(b+h) - \log_e b}{h} = \frac{\log_e e}{b} = \frac{1}{b} .$$

自然対数の底  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\dots$  について、 $e > 0$  かつ  $e \neq 1$  なので、正の各実数  $x$  に対して定数  $e$  を底とする対数  $\log_e x$  を考えることができる。定数  $e$  を底とする対数  $\log_e x$  を自然対数といい、 $\ln x$  と書き表す：

$$\ln x = \log_e x .$$

対数関数  $\log_a x$  の  $b$  における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b} .$$

正の実数  $b$  に対して、自然対数の対数関数  $\ln x = \log_e x$  の  $b$  における微分係数は、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(b+h) - \ln b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e(b+h) - \log_e b}{h} = \frac{\log_e e}{b} = \frac{1}{b} .$$

このように、自然対数の対数関数の微分係数は簡単な式で表される。

[定理 2.9] 実数  $a$  について  $a > 0$  ,  $a \neq 1$  とする. 正の実数  $b$  に対して,  $a$  を底とする対数関数  $\log_a x$  の  $b$  における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b} .$$

特に, 自然対数の底  $e$  を底とする対数関数  $\ln x = \log_e x$  の  $b$  における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(b+h) - \ln b}{h} = \frac{1}{b} .$$

[定理 2.9] 実数  $a$  について  $a > 0$  ,  $a \neq 1$  とする. 正の実数  $b$  に対して,  $a$  を底とする対数関数  $\log_a x$  の  $b$  における微分係数は  $\frac{\log_a e}{b}$  である. 特に, 自然対数の底  $e$  を底とする対数関数  $\ln x = \log_e x$  の  $b$  における微分係数は  $\frac{1}{b}$  である.

[定理 2.9] 実数  $a$  について  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  とする. 正の実数  $b$  に対して,  $a$  を底とする対数関数  $\log_a x$  の  $b$  における微分係数は  $\frac{\log_a e}{b}$  である. 特に, 自然対数の底  $e$  を底とする対数関数  $\ln x = \log_e x$  の  $b$  における微分係数は  $\frac{1}{b}$  である.

例 5 における対数関数  $\log_3 x$  の微分係数を求める.

[定理 2.9] 実数  $a$  について  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  とする. 正の実数  $b$  に対して,  $a$  を底とする対数関数  $\log_a x$  の  $b$  における微分係数は  $\frac{\log_a e}{b}$  である. 特に, 自然対数の底  $e$  を底とする対数関数  $\ln x = \log_e x$  の  $b$  における微分係数は  $\frac{1}{b}$  である.

[例] 5 における対数関数  $\log_3 x$  の微分係数を求める. 5 における対数関数  $\log_3 x$  の微分係数は  $\frac{\log_3 e}{5}$  である. [終]

[定理 2.9] 実数  $a$  について  $a > 0$  ,  $a \neq 1$  とする. 正の実数  $b$  に対して,  $a$  を底とする対数関数  $\log_a x$  の  $b$  における微分係数は  $\frac{\log_a e}{b}$  である. 特に, 自然対数の底  $e$  を底とする対数関数  $\ln x = \log_e x$  の  $b$  における微分係数は  $\frac{1}{b}$  である.

問2.9.1 7 における対数関数  $\log_5 x$  の微分係数を求めよ.

[定理 2.9] 実数  $a$  について  $a > 0$  ,  $a \neq 1$  とする. 正の実数  $b$  に対して,  $a$  を底とする対数関数  $\log_a x$  の  $b$  における微分係数は  $\frac{\log_a e}{b}$  である. 特に, 自然対数の底  $e$  を底とする対数関数  $\ln x = \log_e x$  の  $b$  における微分係数は  $\frac{1}{b}$  である.

**問 2.9.1** 7 における対数関数  $\log_5 x$  の微分係数を求めよ.

7 における対数関数  $\log_5 x$  の微分係数は  $\frac{\log_5 e}{7}$  である.

終

数学では対数を考えるときは多くの場合自然対数を考える．そのため，正の実数  $x$  の自然対数  $\log_e x$  の底を略して  $\log x$  と記す．

数学では対数を考えるときは多くの場合自然対数を考える．そのため，正の実数  $x$  の自然対数  $\log_e x$  の底を略して  $\log x$  と記す．つまり，数学では，正の実数  $x$  に対して， $\log x$  は自然対数  $\log_e x$  を意味する：

$$\log x = \log_e x = \ln x .$$

数学では対数を考えるときは多くの場合自然対数を考える．そのため，正の実数  $x$  の自然対数  $\log_e x$  の底を略して  $\log x$  と記す．つまり，数学では，正の実数  $x$  に対して， $\log x$  は自然対数  $\log_e x$  を意味する：

$$\log x = \log_e x = \ln x .$$

また，工学では常用対数  $\log_{10} x$  を  $\log x$  と略記することがある．なので， $\log x$  は自然対数  $\log_e x$  を意味するときと常用対数  $\log_{10} x$  を意味するときとがある．