

2.8 三角関数の微分係数

正弦関数及び余弦関数ぬついで微分係数を求めるために用いる公式を復習する.

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{r} \sin a = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ - \sin b = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \sin a - \sin b = 2 \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \end{array}$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{r} \cos a = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ - \cos b = \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \cos a - \cos b = -2 \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \end{array}$$

[定義] 関数 f の定義域の実数 a について, $h \rightarrow 0$ のとき $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が収束するならば, 関数 f は a において微分可能であるといい, 極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

[定義] 関数 f の定義域の実数 a について、 $h \rightarrow 0$ のとき $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が収束するならば、関数 f は a において微分可能であるといい、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という。

実数 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$ である。

実数 a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$ である。

正弦関数の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$ を考える.

正弦関数の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$ を考える. 変数 h について,

$$\sin(a+h) - \sin a = 2 \cos \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

正弦関数の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$ を考える. 変数 h について,

$$\begin{aligned}\sin(a+h) - \sin a &= 2 \cos \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = 2 \cos \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= 2 \cos \left(a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

正弦関数の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$ を考える. 変数 h について,

$$\begin{aligned}\sin(a+h) - \sin a &= 2 \cos \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = 2 \cos \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= 2 \cos \left(a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

変数 t を $t = \frac{h}{2}$ とおく. $h = 2t$ なので,

正弦関数の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$ を考える. 変数 h について,

$$\begin{aligned}\sin(a+h) - \sin a &= 2 \cos \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = 2 \cos \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= 2 \cos \left(a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

変数 t を $t = \frac{h}{2}$ とおく. $h = 2t$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} &= \frac{2 \cos \left(a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}}{h} = \frac{2 \cos(a+t) \sin t}{2t} \\ &= \frac{\cos(a+t) \sin t}{t} .\end{aligned}$$

正弦関数の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$ を考える. 変数 h について,

$$\begin{aligned}\sin(a+h) - \sin a &= 2 \cos \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = 2 \cos \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= 2 \cos \left(a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

変数 t を $t = \frac{h}{2}$ とおく. $h = 2t$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} &= \frac{2 \cos \left(a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}}{h} = \frac{2 \cos(a+t) \sin t}{2t} \\ &= \frac{\cos(a+t) \sin t}{t} .\end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$ のとき $t = \frac{h}{2} \rightarrow 0$ なので,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(a+t) \sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

余弦関数 $\cos x$ は連続なので $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) = \cos\left\{\lim_{t \rightarrow 0}(a+t)\right\} = \cos a$. また

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

余弦関数 $\cos x$ は連続なので $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) = \cos\left\{\lim_{t \rightarrow 0}(a+t)\right\} = \cos a$. また

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 . \text{ よって,}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \cos a \cdot 1 = \cos a .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

余弦関数 $\cos x$ は連続なので $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) = \cos\left\{\lim_{t \rightarrow 0}(a+t)\right\} = \cos a$. また

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 . \text{ よって,}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \cos a \cdot 1 = \cos a .$$

実数 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \cos a$ である.

余弦関数の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$ を考える.

余弦関数の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$ を考える. 変数 h について,

$$\cos(a+h) - \cos a = -2 \sin \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

余弦関数の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$ を考える. 変数 h について,

$$\begin{aligned}\cos(a+h) - \cos a &= -2 \sin \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = -2 \sin \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= -2 \sin \left(a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

余弦関数の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$ を考える. 変数 h について,

$$\begin{aligned}\cos(a+h) - \cos a &= -2 \sin \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = -2 \sin \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= -2 \sin \left(a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

変数 t を $t = \frac{h}{2}$ とおく. $h = 2t$ なので,

余弦関数の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$ を考える. 変数 h について,

$$\begin{aligned}\cos(a+h) - \cos a &= -2 \sin \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = -2 \sin \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= -2 \sin \left(a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

変数 t を $t = \frac{h}{2}$ とおく. $h = 2t$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} &= \frac{-2 \sin \left(a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}}{h} = -\frac{2 \sin(a+t) \sin t}{2t} \\ &= -\frac{\sin(a+t) \sin t}{t} .\end{aligned}$$

余弦関数の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$ を考える. 変数 h について,

$$\begin{aligned}\cos(a+h) - \cos a &= -2 \sin \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = -2 \sin \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= -2 \sin \left(a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

変数 t を $t = \frac{h}{2}$ とおく. $h = 2t$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} &= \frac{-2 \sin \left(a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}}{h} = -\frac{2 \sin(a+t) \sin t}{2t} \\ &= -\frac{\sin(a+t) \sin t}{t} .\end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$ のとき $t = \frac{h}{2} \rightarrow 0$ なので,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\sin(a+t) \sin t}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

正弦関数 $\sin x$ は連続なので $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) = \sin \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (a+t) \right\} = \sin a$. また

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

正弦関数 $\sin x$ は連続なので $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) = \sin \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (a+t) \right\} = \sin a$. また

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 . \text{ よって}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} = -\lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -\sin a \cdot 1 = -\sin a .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

正弦関数 $\sin x$ は連続なので $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) = \sin \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (a+t) \right\} = \sin a$. また

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 . \text{ よって}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} = -\lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -\sin a \cdot 1 = -\sin a .$$

実数 a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = -\sin a$ である.

[定理 2.8] 任意の実数 a に対して, a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \cos a ,$$

a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = -\sin a .$$

[定理 2.8] 任意の実数 a に対して, a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\cos a$ であり, a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $-\sin a$ である.

例 $\frac{2\pi}{3}$ における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は

$$-\sin \frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

終

[定理 2.8] 任意の実数 a に対して, a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\cos a$ であり, a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $-\sin a$ である.

問2.8.1 $\frac{5\pi}{6}$ における正弦関数 $\sin x$ の微分係数を求めよ.

[定理 2.8] 任意の実数 a に対して, a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\cos a$ であり, a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $-\sin a$ である.

問2.8.1 $\frac{5\pi}{6}$ における正弦関数 $\sin x$ の微分係数を求めよ.

$\frac{5\pi}{6}$ における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

終

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin 5x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数 a における関数 f の微分係数を調べる.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin 5x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数 a における関数 f の微分係数を調べる.

$$f(a+h) - f(a) = \sin\{5(a+h)\} - \sin 5a = 2 \cos \frac{5(2a+h)}{2} \sin \frac{5h}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin 5x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数 a における関数 f の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sin\{5(a+h)\} - \sin 5a = 2 \cos \frac{5(2a+h)}{2} \sin \frac{5h}{2} \\ &= 2 \cos\left(5a + \frac{5h}{2}\right) \sin \frac{5h}{2} . \end{aligned}$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin 5x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数 a における関数 f の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sin\{5(a+h)\} - \sin 5a = 2 \cos \frac{5(2a+h)}{2} \sin \frac{5h}{2} \\ &= 2 \cos\left(5a + \frac{5h}{2}\right) \sin \frac{5h}{2}. \end{aligned}$$

変数 t を $t = \frac{5h}{2}$ とおく. $h = \frac{2t}{5}$ なので,

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin 5x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数 a における関数 f の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sin\{5(a+h)\} - \sin 5a = 2 \cos \frac{5(2a+h)}{2} \sin \frac{5h}{2} \\ &= 2 \cos\left(5a + \frac{5h}{2}\right) \sin \frac{5h}{2}. \end{aligned}$$

変数 t を $t = \frac{5h}{2}$ とおく. $h = \frac{2t}{5}$ なので,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{2 \cos\left(5a + \frac{5h}{2}\right) \sin \frac{5h}{2}}{h} = \frac{2 \cos(5a+t) \sin t}{\frac{2t}{5}} \\ &= 5 \cos(5a+t) \frac{\sin t}{t}. \end{aligned}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 5 \cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 5 \cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$h \rightarrow 0$ のとき $t = \frac{5h}{2} \rightarrow 0$.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 5 \cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$h \rightarrow 0$ のとき $t = \frac{5h}{2} \rightarrow 0$. 余弦関数 $\cos x$ は連続なので

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos(5a+t) = \cos\left\{\lim_{t \rightarrow 0}(5a+t)\right\} = \cos(5a) .$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 5 \cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$h \rightarrow 0$ のとき $t = \frac{5h}{2} \rightarrow 0$. 余弦関数 $\cos x$ は連続なので

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos(5a+t) = \cos\left\{\lim_{t \rightarrow 0}(5a+t)\right\} = \cos(5a) .$$

また $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 5 \cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$h \rightarrow 0$ のとき $t = \frac{5h}{2} \rightarrow 0$. 余弦関数 $\cos x$ は連続なので

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos(5a+t) = \cos\left\{\lim_{t \rightarrow 0}(5a+t)\right\} = \cos(5a) .$$

また $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. 実数 a における f の微分係数は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ 5 \cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} \\ &= 5 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos(5a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \end{aligned}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 5 \cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$h \rightarrow 0$ のとき $t = \frac{5h}{2} \rightarrow 0$. 余弦関数 $\cos x$ は連続なので

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos(5a+t) = \cos\left\{\lim_{t \rightarrow 0}(5a+t)\right\} = \cos(5a) .$$

また $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. 実数 a における f の微分係数は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ 5 \cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} \\ &= 5 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos(5a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \\ &= 5 \cos(5a) \cdot 1 \\ &= 5 \cos 5a . \end{aligned}$$

終

問2.8.2 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \cos 3x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数 a における関数 f の微分係数を調べよ.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \cos\{ \quad \quad \quad \} - \cos \quad \quad = -2 \sin \frac{\quad \quad \quad}{2} \sin \frac{\quad \quad \quad}{2} \\ &= -2 \sin\left(\quad \quad \quad \right) \sin \quad \quad . \end{aligned}$$

変数 t を $t = \quad \quad$ とおく. $h = \quad \quad$ なので,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{-2 \sin\left(\quad \quad \quad \right) \sin \quad \quad}{h} = -\frac{2 \sin(\quad \quad) \sin \quad \quad}{h} \\ &= \sin(\quad \quad) \frac{\sin \quad \quad}{h} . \end{aligned}$$

問2.8.2 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \cos 3x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数 a における関数 f の微分係数を調べよ.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \cos\{3(a+h)\} - \cos 3a = -2 \sin \frac{3(2a+h)}{2} \sin \frac{3h}{2} \\ &= -2 \sin\left(3a + \frac{3h}{2}\right) \sin \frac{3h}{2}. \end{aligned}$$

変数 t を $t =$ とおく. $h =$ なので,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{-2 \sin\left(\quad\right) \sin}{h} = -\frac{2 \sin(\quad) \sin}{h} \\ &= \sin(\quad) \frac{\sin}{h}. \end{aligned}$$

問2.8.2 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \cos 3x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数 a における関数 f の微分係数を調べよ.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \cos\{3(a+h)\} - \cos 3a = -2 \sin \frac{3(2a+h)}{2} \sin \frac{3h}{2} \\ &= -2 \sin\left(3a + \frac{3h}{2}\right) \sin \frac{3h}{2}. \end{aligned}$$

変数 t を $t = \frac{3h}{2}$ とおく. $h = \frac{2t}{3}$ なので,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{-2 \sin\left(3a + \frac{3h}{2}\right) \sin \frac{3h}{2}}{h} = -\frac{2 \sin(3a+t) \sin t}{\frac{2t}{3}} \\ &= -3 \sin(3a+t) \frac{\sin t}{t}. \end{aligned}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -3 \sin(3a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$h \rightarrow 0$ のとき $t = \frac{3h}{2} \rightarrow 0$. 正弦関数 $\sin x$ は連続なので

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sin(3a+t) = \sin \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (3a+t) \right\} = \sin(3a) .$$

また $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. a における f の微分係数は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -3 \sin(3a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} \\ &= -3 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \sin(3a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \\ &= -3 \sin(3a) \cdot 1 \\ &= -3 \sin 3a . \end{aligned}$$

終