2.7 微分係数

関数 f の定義域の実数 a に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ があるならば，それを a における f の微分係数といった.

関数 f の定義域の実数 a に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t \to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを a における f の微分係数といった．ここで，変数 t に対して変数 h を $h=t-a$ とおく．$t=a+h$ なので，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ .$$

関数 f の定義域の実数 a に対して，極限値 $\lim_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを a における f の微分係数といった．ここで，変数 t に対して変数 h を $h=t-a$ とおく．$t=a+h$ なので，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

$t\to a$ のとき，$h=t-a\to 0$ ，$h\neq 0$ なので，

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

[定理 **2.3.3**]　変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて，$f(x)=g(y)$ で，定数 a と b とについて，変数 x について $x\to a$ のとき $y\to b$ ，$y\neq b$ とする．$y\to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，
$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{y\to b}g(y)$ ．

関数 f の定義域の実数 a に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを a における f の微分係数といった．ここで，変数 t に対して変数 h を $h=t-a$ とおく．$t=a+h$ なので，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

$t\to a$ のとき，$h=t-a\to 0$ ，$h\neq 0$ なので，

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

よって，関数 f の定義域の実数 a に対して，

$$a\ \text{における}\ f\ \text{の微分係数}=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

関数 f の定義域の実数 a に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを a における f の微分係数といった．ここで，変数 t に対して変数 h を $h=t-a$ とおく．$t=a+h$ なので，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

$t\to a$ のとき，$h=t-a\to 0$ ，$h\neq 0$ なので，

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

よって，関数 f の定義域の実数 a に対して，

$$a\text{ における }f\text{ の微分係数}=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ より極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の方が計算し易いことが多いので，微分係数を $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ と定義する．

[定義] 関数 f の定義域の実数 a について，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

[定義] 関数 f の定義域の実数 a について，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=3x^2-5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，2 における関数 g の微分係数を調べる.

[定義] 関数 f の定義域の実数 a について，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=3x^2-5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，2 における関数 g の微分係数を調べる.

2 における関数 g の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=$$

[定義] 関数 f の定義域の実数 a について，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=3x^2-5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，2 における関数 g の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned} g(2+h)-g(2) &= 3(2+h)^2-5(2+h)-(3\cdot 2^2-5\cdot 2) = 12h+3h^2-5h \\ &= 7h+3h^2 \ . \end{aligned}$$

2 における関数 g の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h} =$$

[定義] 関数 f の定義域の実数 a について，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=3x^2-5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，2 における関数 g の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned} g(2+h)-g(2) &= 3(2+h)^2-5(2+h)-(3\cdot 2^2-5\cdot 2) = 12h+3h^2-5h \\ &= 7h+3h^2 \ . \end{aligned}$$

2 における関数 g の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{7h+3h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(7+3h) = 7 \ .$$

終

$\boxed{問2.7.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x^2 - 7x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，5 における関数 f の微分係数を調べよ．

$$f(5+h) - f(5) =$$

5 における関数 f の微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\qquad\qquad}{h} = \lim_{h \to 0} (\qquad\qquad) =$$

$\boxed{問 2.7.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x^2 - 7x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，5 における関数 f の微分係数を調べよ．

$$\begin{aligned} f(5+h) - f(5) &= 2(5+h)^2 - 7(5+h) - (2 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5) = 20h + 2h^2 - 7h \\ &= 2h^2 + 13h \ . \end{aligned}$$

5 における関数 f の微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\qquad\qquad}{h} = \lim_{h \to 0} (\qquad\qquad) =$$

$\boxed{問 2.7.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x^2 - 7x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，5 における関数 f の微分係数を調べよ．

$$\begin{aligned} f(5+h) - f(5) &= 2(5+h)^2 - 7(5+h) - (2 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5) = 20h + 2h^2 - 7h \\ &= 2h^2 + 13h\ . \end{aligned}$$

5 における関数 f の微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 13h}{h} = \lim_{h \to 0} (2h + 13) = 13\ . \qquad \boxed{終}$$

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{2}{3x-5}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，4 における関数 ψ の微分係数を調べる．

例 $\dfrac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\dfrac{2}{3x-5}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，4 における関数 ψ の微分係数を調べる．

4 における関数 ψ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\psi(4+h)-\psi(4)}{h}$$

$\boxed{例}$ $\dfrac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\dfrac{2}{3x-5}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，4 における関数 ψ の微分係数を調べる．

$$\begin{aligned}\psi(4+h)-\psi(4)&=\frac{2}{3(4+h)-5}-\frac{2}{3\cdot4-5}=\frac{2}{3h+7}-\frac{2}{7}=\frac{14-2(3h+7)}{7(3h+7)}\\&=-\frac{6h}{7(3h+7)}\ .\end{aligned}$$

4 における関数 ψ の微分係数は

$$\lim_{h\to0}\frac{\psi(4+h)-\psi(4)}{h}$$

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\dfrac{2}{3x-5}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，4 における関数 ψ の微分係数を調べる．

$$\begin{aligned}\psi(4+h)-\psi(4) &= \frac{2}{3(4+h)-5}-\frac{2}{3\cdot 4-5}=\frac{2}{3h+7}-\frac{2}{7}=\frac{14-2(3h+7)}{7(3h+7)}\\ &= -\frac{6h}{7(3h+7)}\ .\end{aligned}$$

4 における関数 ψ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\psi(4+h)-\psi(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\dfrac{6h}{7(3h+7)}}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{6}{7(3h+7)}$$

$\boxed{例}$ $\frac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{2}{3x-5}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，4 における関数 ψ の微分係数を調べる．

$$\begin{aligned}\psi(4+h) - \psi(4) &= \frac{2}{3(4+h)-5} - \frac{2}{3\cdot 4-5} = \frac{2}{3h+7} - \frac{2}{7} = \frac{14-2(3h+7)}{7(3h+7)} \\ &= -\frac{6h}{7(3h+7)} \ .\end{aligned}$$

4 における関数 ψ の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\psi(4+h)-\psi(4)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{-\dfrac{6h}{7(3h+7)}}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{6}{7(3h+7)} \\ &= -\frac{6}{7\cdot \lim\limits_{h\to 0}(3h+7)} \\ &= -\frac{6}{49} \ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問2.7.2}$ $\dfrac{7}{4}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{5}{4x-7}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，3 における関数 φ の微分係数を調べよ．

$$\varphi(3+h) - \varphi(3) =$$

3 における関数 φ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(3+h)-\varphi(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\qquad}{h} = -\lim_{h\to 0} \qquad = -\frac{\qquad}{\displaystyle\lim_{h\to 0}(\qquad)}$$

$$=$$

$\boxed{\text{問}2.7.2}$ $\dfrac{7}{4}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{5}{4x-7}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，3 における関数 φ の微分係数を調べよ．

$$\varphi(3+h) - \varphi(3) = \frac{5}{4(3+h)-7} - \frac{5}{4\cdot 3-7} = \frac{5}{4h+5} - 1 = \frac{5-(4h+5)}{4h+5}$$
$$= -\frac{4h}{4h+5} \ .$$

3 における関数 φ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(3+h)-\varphi(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\qquad}{h} = -\lim_{h\to 0} \qquad\qquad = -\frac{\qquad}{\lim\limits_{h\to 0}(\qquad)}$$
$$=$$

$\boxed{問2.7.2}$ $\dfrac{7}{4}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{5}{4x-7}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，3 における関数 φ の微分係数を調べよ．

$$\begin{aligned}\varphi(3+h)-\varphi(3) &= \frac{5}{4(3+h)-7} - \frac{5}{4\cdot 3-7} = \frac{5}{4h+5} - 1 = \frac{5-(4h+5)}{4h+5} \\ &= -\frac{4h}{4h+5}\ .\end{aligned}$$

3 における関数 φ の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(3+h)-\varphi(3)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-\dfrac{4h}{4h+5}}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{4}{4h+5} = -\frac{4}{\displaystyle\lim_{h\to 0}(4h+5)} \\ &= -\frac{4}{5}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

[定理 2.7]　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である.

[定理 2.7]　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である．

この定理を証明する．

[定理 2.7]　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である．

　この定理を証明する．関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるとする．

[定理 2.7]　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である．

この定理を証明する．関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるとする．変数 h, x について $h = x - a$ とする． $x = a + h$ なので $f(x) = f(a + h)$ ． $x \to a$ のとき， $h \to 0$ で $h \neq 0$ ．

[定理 **2.7**]　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である．

この定理を証明する．関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるとする．変数 h, x について $h = x - a$ とする． $x = a + h$ なので $f(x) = f(a+h)$ ． $x \to a$ のとき， $h \to 0$ で $h \neq 0$ ．よって定理 **2.3.3** により

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) \ .$$

[定理 **2.3.3**]　変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて，$f(x) = g(y)$ で，定数 a と b とについて，変数 x について $x \to a$ のとき $y \to b$ ， $y \neq b$ とする． $y \to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{y \to b} g(y) \ .$$

[定理 2.7]　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である．

この定理を証明する．関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるとする．変数 h, x について $h = x - a$ とする．$x = a + h$ なので $f(x) = f(a+h)$ ．$x \to a$ のとき，$h \to 0$ で $h \neq 0$ ．よって定理 **2.3.3** により

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) \ .$$

a における f の微分係数を b とおく：$\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b$ ．

[定理 **2.7**]　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である．

この定理を証明する．関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるとする．変数 h, x について $h = x - a$ とする． $x = a + h$ なので $f(x) = f(a+h)$ ． $x \to a$ のとき， $h \to 0$ で $h \neq 0$ ．よって定理 **2.3.3** により

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) \ .$$

a における f の微分係数を b とおく： $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = b$ ．

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \to 0} \{f(a+h) - f(a)\}$$

[定理 **2.7**]　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である.

この定理を証明する．関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるとする．変数 h, x について $h = x - a$ とする． $x = a + h$ なので $f(x) = f(a+h)$ ． $x \to a$ のとき， $h \to 0$ で $h \neq 0$ ．よって定理 **2.3.3** により

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) \ .$$

a における f の微分係数を b とおく： $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b$ ．

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) - f(a) &= \lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \to 0} \{f(a+h) - f(a)\} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h \right\}\end{aligned}$$

[定理 **2.7**]　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である．

この定理を証明する．関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるとする．変数 h, x について $h = x - a$ とする． $x = a + h$ なので $f(x) = f(a+h)$ ． $x \to a$ のとき， $h \to 0$ で $h \neq 0$ ．よって定理 **2.3.3** により

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) \ .$$

a における f の微分係数を b とおく： $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b$ ．

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) - f(a) &= \lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \to 0} \{f(a+h) - f(a)\} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h \right\} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h = b \cdot 0 \\ &= 0 \ .\end{aligned}$$

[定理 **2.7**]　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である．

この定理を証明する．関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるとする．変数 h, x について $h = x - a$ とする． $x = a + h$ なので $f(x) = f(a+h)$ ． $x \to a$ のとき， $h \to 0$ で $h \neq 0$ ．よって定理 **2.3.3** により

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) \ .$$

a における f の微分係数を b とおく： $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b$ ．

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) - f(a) &= \lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \to 0} \{f(a+h) - f(a)\} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h \right\} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h = b \cdot 0 \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

よって $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ なので，f は a において連続である． 終

つまり，関数 f 及び f の定義域の実数 a について，

$$f \text{ が } a \text{ において微分可能} \quad \text{ならば} \quad f \text{ は } a \text{ において連続}$$

である．

つまり，関数 f 及び f の定義域の実数 a について，

$$f \text{ が } a \text{ において微分可能} \quad \text{ならば} \quad f \text{ は } a \text{ において連続}$$

である．しかしこの逆は必ずしも成り立たない：関数 f が a において連続であっても f が a において微分可能でないことがある．