2.5 微分係数

変化する“速さ”について考える.

ある列車がある駅を発車して走行しているとする．この列車の走行の速度を考える．時刻 x における駅からの走行距離を $\varphi(x)$ とおく．

　ある列車がある駅を発車して走行しているとする．この列車の走行の速度を考える．時刻 x における駅からの走行距離を $\varphi(x)$ とおく．時刻が a から t に変わる間に，走行距離は $\varphi(a)$ から $\varphi(t)$ に変わる；

　ある列車がある駅を発車して走行しているとする．この列車の走行の速度を考える．時刻 x における駅からの走行距離を $\varphi(x)$ とおく．時刻が a から t に変わる間に，走行距離は $\varphi(a)$ から $\varphi(t)$ に変わる；この間の時間は $t-a$ で，この間の走行距離は $\varphi(t)-\varphi(a)$ なので，この間の平均速度は

$$\frac{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の走行距離}}{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の走行時間}} = \frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a} \ .$$

ある列車がある駅を発車して走行しているとする．この列車の走行の速度を考える．時刻 x における駅からの走行距離を $\varphi(x)$ とおく．時刻が a から t に変わる間に，走行距離は $\varphi(a)$ から $\varphi(t)$ に変わる；この間の時間は $t-a$ で，この間の走行距離は $\varphi(t)-\varphi(a)$ なので，この間の平均速度は

$$\frac{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の走行距離}}{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の走行時間}} = \frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a} \ .$$

変数 t の値を定数 a に限りなく近づけるとき，時刻 a から t までの間の平均の速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a}$ が t と無関係な一つの定数に限りなく近づくならば，その定数を時刻 a における（瞬間）速度と考える：

ある列車がある駅を発車して走行しているとする．この列車の走行の速度を考える．時刻 x における駅からの走行距離を $\varphi(x)$ とおく．時刻が a から t に変わる間に，走行距離は $\varphi(a)$ から $\varphi(t)$ に変わる；この間の時間は $t-a$ で，この間の走行距離は $\varphi(t)-\varphi(a)$ なので，この間の平均速度は

$$\frac{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の走行距離}}{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の走行時間}} = \frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a} .$$

変数 t の値を定数 a に限りなく近づけるとき，時刻 a から t までの間の平均の速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a}$ が t と無関係な一つの定数に限りなく近づくならば，その定数を時刻 a における（瞬間）速度と考える：

時刻 a における（瞬間）速度は平均速度の極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a}$.

時刻と共にある水槽の中の水の量が増えていくとする．この水槽中の水量が増加する速さを考える．時刻 x における水槽中の水量を $\psi(x)$ とおく．

時刻と共にある水槽の中の水の量が増えていくとする．この水槽中の水量が増加する速さを考える．時刻 x における水槽中の水量を $\psi(x)$ とおく．時刻が a から t に変わる間に，水槽中の水量は $\psi(a)$ から $\psi(t)$ に変わる；

時刻と共にある水槽の中の水の量が増えていくとする．この水槽中の水量が増加する速さを考える．時刻 x における水槽中の水量を $\psi(x)$ とおく．時刻が a から t に変わる間に，水槽中の水量は $\psi(a)$ から $\psi(t)$ に変わる；この間の時間は $t-a$ で，この間の水量の増加は $\psi(t)-\psi(a)$ なので，この間の水量の増加の平均の速さは

$$\frac{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の増加量}}{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の時間}} = \frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a} \ .$$

時刻と共にある水槽の中の水の量が増えていくとする．この水槽中の水量が増加する速さを考える．時刻 x における水槽中の水量を $\psi(x)$ とおく．時刻が a から t に変わる間に，水槽中の水量は $\psi(a)$ から $\psi(t)$ に変わる；この間の時間は $t-a$ で，この間の水量の増加は $\psi(t)-\psi(a)$ なので，この間の水量の増加の平均の速さは

$$\frac{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の増加量}}{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の時間}} = \frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a} \ .$$

変数 t の値を定数 a に限りなく近づけるとき，時刻 a から t までの間の水量の増加の平均の速さ $\dfrac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a}$ が t と無関係な一つの定数に限りなく近づくならば，その定数を時刻 a における水量の増加の速さと考える：

時刻と共にある水槽の中の水の量が増えていくとする．この水槽中の水量が増加する速さを考える．時刻 x における水槽中の水量を $\psi(x)$ とおく．時刻が a から t に変わる間に，水槽中の水量は $\psi(a)$ から $\psi(t)$ に変わる；この間の時間は $t-a$ で，この間の水量の増加は $\psi(t)-\psi(a)$ なので，この間の水量の増加の平均の速さは

$$\frac{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の増加量}}{\text{時刻 } a \text{ から } t \text{ までの間の時間}} = \frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a} \ .$$

変数 t の値を定数 a に限りなく近づけるとき，時刻 a から t までの間の水量の増加の平均の速さ $\dfrac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a}$ が t と無関係な一つの定数に限りなく近づくならば，その定数を時刻 a における水量の増加の速さと考える：

時刻 a における水量の増加の速さは平均の速さの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a}$ ．

時刻以外の量の変化に対する“速さ”もある.

燃料自動車は走行するとき燃料を消費する．燃料を消費する“速さ”は，走行時間に対する速さよりも走行距離に対する速さの方が重要である．

燃料自動車は走行するとき燃料を消費する．燃料を消費する“速さ”は，走行時間に対する速さよりも走行距離に対する速さの方が重要である．ある燃料自動車が一直線に走るとして，発車からの走行距離 x における燃料消費量を $\rho(x)$ とおく．

燃料自動車は走行するとき燃料を消費する．燃料を消費する“速さ”は，走行時間に対する速さよりも走行距離に対する速さの方が重要である．ある燃料自動車が一直線に走るとして，発車からの走行距離 x における燃料消費量を $\rho(x)$ とおく．発車からの走行距離が a から s に変わる間に，燃料消費量は $\rho(a)$ から $\rho(s)$ に変わる；

燃料自動車は走行するとき燃料を消費する．燃料を消費する“速さ”は，走行時間に対する速さよりも走行距離に対する速さの方が重要である．ある燃料自動車が一直線に走るとして，発車からの走行距離 x における燃料消費量を $\rho(x)$ とおく．発車からの走行距離が a から s に変わる間に，燃料消費量は $\rho(a)$ から $\rho(s)$ に変わる；この間の走行距離は $s-a$ で，この間の燃料消費量は $\rho(s)-\rho(a)$ なので，この間の燃料消費の平均の速さは

$$\frac{\text{発車からの走行距離 } a \text{ から } s \text{ までの間の燃料消費量}}{\text{発車からの走行距離 } a \text{ から } s \text{ までの間の走行距離}} = \frac{\rho(s)-\rho(a)}{s-a} \ .$$

燃料自動車は走行するとき燃料を消費する．燃料を消費する“速さ”は，走行時間に対する速さよりも走行距離に対する速さの方が重要である．ある燃料自動車が一直線に走るとして，発車からの走行距離 x における燃料消費量を $\rho(x)$ とおく．発車からの走行距離が a から s に変わる間に，燃料消費量は $\rho(a)$ から $\rho(s)$ に変わる；この間の走行距離は $s-a$ で，この間の燃料消費量は $\rho(s)-\rho(a)$ なので，この間の燃料消費の平均の速さは

$$\frac{\text{発車からの走行距離 } a \text{ から } s \text{ までの間の燃料消費量}}{\text{発車からの走行距離 } a \text{ から } s \text{ までの間の走行距離}} = \frac{\rho(s)-\rho(a)}{s-a} .$$

変数 s の値を定数 a に限りなく近づけるとき，発車からの走行距離 a から s までの間の燃料消費の平均の速さ $\dfrac{\rho(s)-\rho(a)}{s-a}$ が s と無関係な一つの定数に限りなく近づくならば，その定数を発車からの走行距離 a における燃料消費の速さと考える：

燃料自動車は走行するとき燃料を消費する．燃料を消費する“速さ”は，走行時間に対する速さよりも走行距離に対する速さの方が重要である．ある燃料自動車が一直線に走るとして，発車からの走行距離 x における燃料消費量を $\rho(x)$ とおく．発車からの走行距離が a から s に変わる間に，燃料消費量は $\rho(a)$ から $\rho(s)$ に変わる；この間の走行距離は $s-a$ で，この間の燃料消費量は $\rho(s)-\rho(a)$ なので，この間の燃料消費の平均の速さは

$$\frac{\text{発車からの走行距離 } a \text{ から } s \text{ までの間の燃料消費量}}{\text{発車からの走行距離 } a \text{ から } s \text{ までの間の走行距離}} = \frac{\rho(s)-\rho(a)}{s-a} .$$

変数 s の値を定数 a に限りなく近づけるとき，発車からの走行距離 a から s までの間の燃料消費の平均の速さ $\dfrac{\rho(s)-\rho(a)}{s-a}$ が s と無関係な一つの定数に限りなく近づくならば，その定数を発車からの走行距離 a における燃料消費の速さと考える：

走行距離 a における燃料消費の速さは平均の速さの極限値 $\displaystyle\lim_{s\to a}\frac{\rho(s)-\rho(a)}{s-a}$.

このような考え方を抽象化する.

　このような考え方を抽象化する．関数 f の定義域に属す実数 a, b について，変数 x の値が a から b に変化すると，$f(x)$ の値は $f(a)$ から $f(b)$ に変化する．

このような考え方を抽象化する．関数 f の定義域に属す実数 a, b について，変数 x の値が a から b に変化すると，$f(x)$ の値は $f(a)$ から $f(b)$ に変化する．このとき，x の変化量は $b-a$ であり，$f(x)$ の変化量は $f(b)-f(a)$ である．

このような考え方を抽象化する．関数 f の定義域に属す実数 a, b について，変数 x の値が a から b に変化すると，$f(x)$ の値は $f(a)$ から $f(b)$ に変化する．このとき，x の変化量は $b-a$ であり，$f(x)$ の変化量は $f(b)-f(a)$ である．x の値が a から b へ変化するときに $f(x)$ の値が変化する “平均の速さ” は次の式で表される：

$$\frac{f(x)\ \text{の変化量}}{x\ \text{の変化量}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .$$

　このような考え方を抽象化する．関数 f の定義域に属す実数 a, b について，変数 x の値が a から b に変化すると，$f(x)$ の値は $f(a)$ から $f(b)$ に変化する．このとき，x の変化量は $b-a$ であり，$f(x)$ の変化量は $f(b)-f(a)$ である．x の値が a から b へ変化するときに $f(x)$ の値が変化する“平均の速さ”は次の式で表される：

$$\frac{f(x)\ \text{の変化量}}{x\ \text{の変化量}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .$$

この式の値を a から b までの $f(x)$ の平均変化率という．

　このような考え方を抽象化する．関数 f の定義域に属す実数 a,b について，変数 x の値が a から b に変化すると，$f(x)$ の値は $f(a)$ から $f(b)$ に変化する．このとき，x の変化量は $b-a$ であり，$f(x)$ の変化量は $f(b)-f(a)$ である．x の値が a から b へ変化するときに $f(x)$ の値が変化する“平均の速さ”は次の式で表される：

$$\frac{f(x)\ \text{の変化量}}{x\ \text{の変化量}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .$$

この式の値を a から b までの $f(x)$ の平均変化率という．更に，定数 a 及び変数 t に対して，a において $f(x)$ が変化する“瞬間の速さ”を，a から t までの $f(x)$ の平均変化率 $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ の $t \to a$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ と考える．

このような考え方を抽象化する．関数 f の定義域に属す実数 a, b について，変数 x の値が a から b に変化すると，$f(x)$ の値は $f(a)$ から $f(b)$ に変化する．このとき，x の変化量は $b-a$ であり，$f(x)$ の変化量は $f(b)-f(a)$ である．x の値が a から b へ変化するときに $f(x)$ の値が変化する“平均の速さ”は次の式で表される：

$$\frac{f(x) \text{ の変化量}}{x \text{ の変化量}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} .$$

この式の値を a から b までの $f(x)$ の平均変化率という．更に，定数 a 及び変数 t に対して，a において $f(x)$ が変化する“瞬間の速さ”を，a から t までの $f(x)$ の平均変化率 $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ の $t \to a$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t \to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ と考える．この極限値を a における f の変化率あるいは微分係数という．

[定義] 関数 f の定義域に属す定数 a 及び変数 t について，$t \to a$ のとき $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ を a における f の微分係数という.

[定義]　関数 f の定義域の実数 a における関数 f の微分係数は極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ である．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^2+3x-4$ と定める．2 における関数 f の微分係数を調べる．

[定義] 関数 f の定義域の実数 a における関数 f の微分係数は極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ である．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^2+3x-4$ と定める．2 における関数 f の微分係数を調べる．変数 t について，$t\neq 2$ のとき，

$$\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\frac{t^2+3t-4-6}{t-2}=\frac{t^2+3t-10}{t-2}=\frac{(t+5)(t-2)}{t-2}=t+5\ .$$

[定義]　関数 f の定義域の実数 a における関数 f の微分係数は極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ である．

$\boxed{\text{例}}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^2+3x-4$ と定める．2 における関数 f の微分係数を調べる．変数 t について，$t\neq 2$ のとき，

$$\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\frac{t^2+3t-4-6}{t-2}=\frac{t^2+3t-10}{t-2}=\frac{(t+5)(t-2)}{t-2}=t+5\ .$$

2 における関数 f の微分係数は

$$\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=$$

[定義]　関数 f の定義域の実数 a における関数 f の微分係数は極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ である．

$\boxed{\text{例}}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^2+3x-4$ と定める．2 における関数 f の微分係数を調べる．変数 t について，$t\neq 2$ のとき，

$$\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\frac{t^2+3t-4-6}{t-2}=\frac{t^2+3t-10}{t-2}=\frac{(t+5)(t-2)}{t-2}=t+5\ .$$

2 における関数 f の微分係数は

$$\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2}(t+5)=2+5=7\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問2.5.1}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^2 - 4x + 5$ と定める．3 における関数 g の微分係数を調べよ．

変数 t について，$t \neq 3$ のとき

$$\frac{g(t) - g(3)}{t - 3} =$$

3 における関数 g の微分係数は

$$\lim_{t \to 3} \frac{g(t) - g(3)}{t - 3} =$$

$\boxed{\text{問}2.5.1}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=x^2-4x+5$ と定める．3 における関数 g の微分係数を調べよ．

変数 t について，$t\neq 3$ のとき

$$\frac{g(t)-g(3)}{t-3}=\frac{t^2-4t+5-2}{t-3}=\frac{t^2-4t+3}{t-3}=\frac{(t-1)(t-3)}{t-3}=t-1\ .$$

3 における関数 g の微分係数は

$$\lim_{t\to 3}\frac{g(t)-g(3)}{t-3}=$$

$\boxed{\text{問}2.5.1}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^2 - 4x + 5$ と定める．3 における関数 g の微分係数を調べよ．

変数 t について，$t \neq 3$ のとき

$$\frac{g(t) - g(3)}{t-3} = \frac{t^2 - 4t + 5 - 2}{t-3} = \frac{t^2 - 4t + 3}{t-3} = \frac{(t-1)(t-3)}{t-3} = t - 1 \ .$$

3 における関数 g の微分係数は

$$\lim_{t \to 3} \frac{g(t) - g(3)}{t-3} = \lim_{t \to 3} (t-1) = 2 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 指数が 2 である冪関数を φ とおく：$\varphi(x) = x^2$ ．各実数 a における関数 φ の微分係数 $\displaystyle\lim_{t \to a} \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - a}$ を調べる．

例 指数が 2 である冪関数を φ とおく：$\varphi(x) = x^2$ ．各実数 a における関数 φ の微分係数 $\displaystyle\lim_{t \to a} \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - a}$ を調べる．

変数 t について，$t \neq a$ のとき，

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - a} = \frac{t^2 - a^2}{t - a}$$

$\boxed{\text{例}}$ 指数が 2 である冪関数を φ とおく：$\varphi(x)=x^2$ ．各実数 a における関数 φ の微分係数 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a}$ を調べる.

因数分解の公式 $t^2-a^2=(t-a)(t+a)$ を用いる．変数 t について，$t\neq a$ のとき，

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a}=\frac{t^2-a^2}{t-a}=\frac{(t-a)(t+a)}{t-a}=t+a\ .$$

例 指数が 2 である冪関数を φ とおく：$\varphi(x) = x^2$ ．各実数 a における関数 φ の微分係数 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a}$ を調べる．

因数分解の公式 $t^2 - a^2 = (t-a)(t+a)$ を用いる．変数 t について，$t \neq a$ のとき，

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a} = \frac{t^2-a^2}{t-a} = \frac{(t-a)(t+a)}{t-a} = t+a \ .$$

従って，a における冪関数 $\varphi(x) = x^2$ の微分係数は

$$\lim_{t\to a}\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a} = \lim_{t\to a}\frac{t^2-a^2}{t-a} = \lim_{t\to a}(t+a) = a+a = 2a \ .$$

終

$\boxed{問2.5.2}$ 指数が 3 である冪関数を ψ とおく：$\psi(x)=x^3$ ．各実数 a における関数 ψ の微分係数 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a}$ を調べよ．因数分解の公式 $t^3-a^3=(t-a)(t^2+at+a^2)$ を用いる．

変数 t について，$t\neq a$ のとき，

$$\frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a}=\frac{t^3-a^3}{t-a}=\frac{\qquad\qquad\qquad}{t-a}=$$

a における関数 $\psi(x)=x^3$ の微分係数は，

$$\lim_{t\to a}\frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a}=\lim_{t\to a}(\qquad\qquad\qquad)=$$

$\boxed{問2.5.2}$ 指数が 3 である冪関数を ψ とおく：$\psi(x) = x^3$ ．各実数 a における関数 ψ の微分係数 $\lim_{t\to a}\dfrac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a}$ を調べよ．因数分解の公式 $t^3-a^3=(t-a)(t^2+at+a^2)$ を用いる．

変数 t について，$t \neq a$ のとき

$$\frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a} = \frac{t^3-a^3}{t-a} = \frac{(t-a)(t^2+at+a^2)}{t-a} = t^2+at+a^2 \ .$$

a における関数 $\psi(x) = x^3$ の微分係数は，

$$\lim_{t\to a}\frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a} = \lim_{t\to a}(\qquad\qquad\qquad) =$$

$\boxed{問2.5.2}$ 指数が 3 である冪関数を ψ とおく：$\psi(x)=x^3$ ．各実数 a における関数 ψ の微分係数 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a}$ を調べよ．因数分解の公式 $t^3-a^3=(t-a)(t^2+at+a^2)$ を用いる．

変数 t について，$t\neq a$ のとき

$$\frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a}=\frac{t^3-a^3}{t-a}=\frac{(t-a)(t^2+at+a^2)}{t-a}=t^2+at+a^2\ .$$

a における関数 $\psi(x)=x^3$ の微分係数は，

$$\lim_{t\to a}\frac{\psi(t)-\psi(a)}{t-a}=\lim_{t\to a}(t^2+at+a^2)=a^2+aa+a^2=3a^2\ .$$

$\boxed{終}$

冪関数の微分係数について次のようになる：各実数 a に対して，

$$
\begin{aligned}
&a \text{ における冪関数 } x^2 \text{ の微分係数は } 2a \ ; \\
&a \text{ における冪関数 } x^3 \text{ の微分係数は } 3a^2 \ ; \\
&a \text{ における冪関数 } x^4 \text{ の微分係数は } 4a^3 \ ; \\
&a \text{ における冪関数 } x^5 \text{ の微分係数は } 5a^4 \ ; \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad .
\end{aligned}
$$

冪関数の微分係数について次のようになる：各実数 a に対して，

$$
\begin{array}{ll}
a \text{ における冪関数 } x^2 \text{ の微分係数は } 2a & ; \\
a \text{ における冪関数 } x^3 \text{ の微分係数は } 3a^2 & ; \\
a \text{ における冪関数 } x^4 \text{ の微分係数は } 4a^3 & ; \\
a \text{ における冪関数 } x^5 \text{ の微分係数は } 5a^4 & ; \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots & .
\end{array}
$$

一般的にいうと次の定理が成り立つ．

[定理 **2.5.1**] 定数 n が正の整数であるとき，各実数 a における冪関数 x^n の微分係数は

$$\lim_{t \to a} \frac{t^n - a^n}{t - a} = n a^{n-1} \ .$$

[定理 **2.5.1**]　定数 n が正の整数であるとき，各実数 a における冪関数 x^n の微分係数は

$$\lim_{t \to a} \frac{t^n - a^n}{t - a} = n a^{n-1} \quad .$$

[定理 **2.5.1**] 定数 n が正の整数であるとき，各実数 a における冪関数 x^n の微分係数は

$$\lim_{t \to a} \frac{t^n - a^n}{t - a} = na^{n-1} \quad .$$

この定理を示す.

[定理 **2.5.1**] 定数 n が正の整数であるとき，各実数 a における冪関数 x^n の微分係数は

$$\lim_{t\to a}\frac{t^n-a^n}{t-a} = na^{n-1} \ .$$

この定理を示す．実数 a に対して変数 t の整式 $P(t)=t^n-a^n$ を考えると， $P(a)=a^n-a^n=0$ なので，因数定理より，整式 $P(t)=t^n-a^n$ は $t-a$ で割り切れる．

[定理 **2.5.1**] 定数 n が正の整数であるとき，各実数 a における冪関数 x^n の微分係数は

$$\lim_{t \to a} \frac{t^n - a^n}{t - a} = na^{n-1} \ .$$

この定理を示す．実数 a に対して変数 t の整式 $P(t) = t^n - a^n$ を考えると， $P(a) = a^n - a^n = 0$ なので，因数定理より，整式 $P(t) = t^n - a^n$ は $t - a$ で割り切れる．実際に $t^n - a^n$ を $t - a$ で割ると次のようになる．

$$
\begin{array}{rl}
 & t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1} \\
\cline{2-2}
t-a \,\big) & t^n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -a^n \\
 & \underline{t^n - at^{n-1}} \\
 & \qquad at^{n-1} \\
 & \qquad \underline{at^{n-1} - a^2t^{n-2}} \\
 & \qquad\qquad\qquad a^2t^{n-2} \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{a^2t^{n-2} - a^3t^{n-3}} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a^3t^{n-3} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{a^3t^{n-3} - a^4t^{n-4}} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ddots \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{a^{n-2}t^2} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{a^{n-2}t^2 - a^{n-1}t} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a^{n-1}t - a^n \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{a^{n-1}t - a^n} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

従って

$$t^n - a^n \;=\; (t-a)(t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1})\;.$$

従って

$$t^n - a^n = (t-a)(t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1}) \ .$$

よって， $t \neq a$ のとき，

$$\frac{t^n - a^n}{t-a} = t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1} \ .$$

従って

$$t^n - a^n = (t-a)(t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1}) \ .$$

よって，$t \neq a$ のとき，

$$\frac{t^n - a^n}{t-a} = t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1} \ .$$

この等式の右辺は変数 t の整式として 0 次から $(n-1)$ 次までの n 個の項がある．

従って

$$t^n - a^n = (t-a)(t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1}) .$$

よって，$t \neq a$ のとき，

$$\frac{t^n - a^n}{t-a} = t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1} .$$

この等式の右辺は変数 t の整式として 0 次から $(n-1)$ 次までの n 個の項がある．$t \to a$ のとき，$t \neq a$ なので，a における冪関数 x^n の微分係数は

$$\lim_{t\to a} \frac{t^n - a^n}{t-a} = \lim_{t\to a}(t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1})$$

従って

$$t^n - a^n = (t-a)(t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1})\ .$$

よって， $t \neq a$ のとき，

$$\frac{t^n - a^n}{t-a} = t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1}\ .$$

この等式の右辺は変数 t の整式として 0 次から $(n-1)$ 次までの n 個の項がある． $t \to a$ のとき， $t \neq a$ なので，a における冪関数 x^n の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{t\to a}\frac{t^n - a^n}{t-a} &= \lim_{t\to a}(t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + aa^{n-2} + a^2a^{n-3} + a^3a^{n-4} + \cdots + a^{n-3}a^2 + a^{n-2}a + a^{n-1}\end{aligned}$$

従って

$$t^n - a^n = (t-a)(t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1})\ .$$

よって，$t \neq a$ のとき，

$$\frac{t^n - a^n}{t-a} = t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1}\ .$$

この等式の右辺は変数 t の整式として 0 次から $(n-1)$ 次までの n 個の項がある．$t \to a$ のとき，$t \neq a$ なので，a における冪関数 x^n の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{t \to a} \frac{t^n - a^n}{t-a} &= \lim_{t \to a}(t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + aa^{n-2} + a^2a^{n-3} + a^3a^{n-4} + \cdots + a^{n-3}a^2 + a^{n-2}a + a^{n-1} \\ &= a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} + a^{n-1}\end{aligned}$$

従って

$$t^n - a^n = (t-a)(t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1}) \ .$$

よって，$t \neq a$ のとき，

$$\frac{t^n - a^n}{t-a} = t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1} \ .$$

この等式の右辺は変数 t の整式として 0 次から $(n-1)$ 次までの n 個の項がある．$t \to a$ のとき，$t \neq a$ なので，a における冪関数 x^n の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{t\to a}\frac{t^n - a^n}{t-a} &= \lim_{t\to a}(t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + aa^{n-2} + a^2a^{n-3} + a^3a^{n-4} + \cdots + a^{n-3}a^2 + a^{n-2}a + a^{n-1} \\ &= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} + a^{n-1}}_{n\text{ 個の } a^{n-1} \text{ の和}}\end{aligned}$$

従って

$$t^n - a^n = (t-a)(t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1}) \ .$$

よって，$t \neq a$ のとき，

$$\frac{t^n - a^n}{t-a} = t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1} \ .$$

この等式の右辺は変数 t の整式として 0 次から $(n-1)$ 次までの n 個の項がある．$t \to a$ のとき，$t \neq a$ なので，a における冪関数 x^n の微分係数は

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to a} \frac{t^n - a^n}{t-a} &= \lim_{t\to a}(t^{n-1} + at^{n-2} + a^2t^{n-3} + a^3t^{n-4} + \cdots + a^{n-3}t^2 + a^{n-2}t + a^{n-1}) \\
&= a^{n-1} + aa^{n-2} + a^2a^{n-3} + a^3a^{n-4} + \cdots + a^{n-3}a^2 + a^{n-2}a + a^{n-1} \\
&= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} + a^{n-1}}_{n \text{ 個の } a^{n-1} \text{ の和}} \\
&= na^{n-1} \ .
\end{aligned}$$

[定理 **2.5.1**] 定数 n が正の整数であるとき，各実数 a における冪関数 x^n の微分係数は $\lim_{t \to a} \dfrac{t^n - a^n}{t - a} = na^{n-1}$ である.

例 -4 における冪関数 x^3 の微分係数を求める.

[定理 **2.5.1**] 定数 n が正の整数であるとき，各実数 a における冪関数 x^n の微分係数は $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{t^n-a^n}{t-a}=na^{n-1}$ である．

$\boxed{\text{例}}$ -4 における冪関数 x^3 の微分係数を求める．実数 a における冪関数 x^3 の微分係数は $3a^2$ である．

[定理 **2.5.1**] 定数 n が正の整数であるとき，各実数 a における冪関数 x^n の微分係数は $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{t^n-a^n}{t-a}=na^{n-1}$ である．

例 -4 における冪関数 x^3 の微分係数を求める．実数 a における冪関数 x^3 の微分係数は $3a^2$ である．-4 における冪関数 x^3 の微分係数は

$$3\cdot(-4)^2=3\cdot 16=48\ .$$

終

定数関数 f の定義域の実数 a 及び変数 t について，$f(a) = f(t)$ なので，a における f の微分係数は

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{t \to a} \frac{0}{t - a} = \lim_{t \to a} 0 = 0 .$$

定数関数 f の定義域の実数 a 及び変数 t について， $f(a)=f(t)$ なので，a における f の微分係数は

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \lim_{t\to a}\frac{0}{t-a} = \lim_{t\to a}0 = 0 \ .$$

[定理 **2.5.2**] 定数関数の微分係数は 0 である.