

2.4 関数の極限の計算

関数 f 及び定数 a について、 a を除く f の定義域の中で a に限りなく近づることができる、

a を除く f の定義域の実数を表す変数 x の値を a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 x の値を a に限りなく近づけると $f(x)$ は c に収束する、または、

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は c に収束するといひ、次のように書き表す：

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow c .$$

関数 f 及び定数 a について、 a を除く f の定義域の中で a に限りなく近づけることができ、

a を除く f の定義域の実数を表す変数 x の値を a に限りなく近づけると
 f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 x の値を a に限りなく近づけると $f(x)$ は c に収束する、または、
 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は c に収束するといひ、次のように書き表す：

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow c .$$

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が定数 c に収束するとき、 c を $f(x)$ の極限（値）といひ、
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ と書き表す： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$.

関数 f 及び定数 a について、 a を除く f の定義域の中で a に限りなく近づけることができ、

a を除く f の定義域の実数を表す変数 x の値を a に限りなく近づけると
 f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 x の値を a に限りなく近づけると $f(x)$ は c に収束する、または、
 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は c に収束するといひ、次のように書き表す：

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow c .$$

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が定数 c に収束するとき、 c を $f(x)$ の極限（値）といひ、
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ と書き表す： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$. a が f の定義域に属すときは
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ であることが多い。

関数 f 及び定数 a について、 a を除く f の定義域の中で a に限りなく近づくとすることができて、

a を除く f の定義域の実数を表す変数 x の値を a に限りなく近づけると f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 x の値を a に限りなく近づけると $f(x)$ は c に収束する、または、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は c に収束するといひ、次のように書き表す：

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow c .$$

$x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が定数 c に収束するとき、 c を $f(x)$ の極限（値）といひ、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ と書き表す： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$. a が f の定義域に属すときは $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ であることが多い。 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ であるとき、 a において f は連続であるといひ。

前回扱った極限値の計算では，結局は実数 a における関数 f の連続性

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ を用いて計算した．しかしこれだけでは計算できないときがある；むしろこのようなときにこそ極限値を考える意味がある．

前回扱った極限値の計算では、結局は実数 a における関数 f の連続性

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ を用いて計算した。しかしこれだけでは計算できないときがある；むしろこのようなときにこそ極限値を考える意味がある。

次のことに注意すること：

関数の独立変数 x 及び定数 a について、 $x \rightarrow a$ のとき $x \neq a$ 。

例 変数 x について $x \rightarrow 3$ のときの $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ の極限を考える.

例 変数 x について $x \rightarrow 3$ のときの $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ の極限を考える.

分母の極限值が $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 3 - 3 = 0$ なので, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ を $\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}$

に変形できない. そこで以下のように計算する.

例 変数 x について $x \rightarrow 3$ のときの $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ の極限を考える.

分母の極限值が $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 3 - 3 = 0$ なので, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ を $\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}$

に変形できない. そこで以下のように計算する.

$x^2 - 9$ を因数分解すると $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$. $x \rightarrow 3$ のとき, $x \neq 3$ つまり $x - 3 \neq 0$ なので,

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3.$$

例 変数 x について $x \rightarrow 3$ のときの $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ の極限を考える.

分母の極限值が $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 3 - 3 = 0$ なので, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ を $\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}$

に変形できない. そこで以下のように計算する.

$x^2 - 9$ を因数分解すると $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$. $x \rightarrow 3$ のとき, $x \neq 3$ つまり $x - 3 \neq 0$ なので,

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3 .$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6 .$$

終

このように、変数 x の整式 $A(x)$, $B(x)$ 及び定数 a について $A(a) = B(a) = 0$ であるとき、因数定理より、整式 $x - a$ が $A(x)$, $B(x)$ の因数である；

このように、変数 x の整式 $A(x)$, $B(x)$ 及び定数 a について $A(a) = B(a) = 0$ であるとき、因数定理より、整式 $x - a$ が $A(x)$, $B(x)$ の因数である；極限值 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x)}{B(x)}$ を求めるために、分数式 $\frac{A(x)}{B(x)}$ を $x - a$ で約分することが多い。

例 変数 x について $x \rightarrow 1$ のときの $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}$ の極限を調べる.

例 変数 x について $x \rightarrow 1$ のときの $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}$ の極限を調べる.

$x \rightarrow 1$ のとき, $x \neq 1$ より $x - 1 \neq 0$ なので,

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{x + 4}{x - 3} .$$

例 変数 x について $x \rightarrow 1$ のときの $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}$ の極限を調べる.

$x \rightarrow 1$ のとき, $x \neq 1$ より $x - 1 \neq 0$ なので,

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{x + 4}{x - 3} .$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 4}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 4)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 3)} = \frac{1 + 4}{1 - 3} = \frac{5}{-2} \\ &= -\frac{5}{2} . \end{aligned}$$

終

問2.4.1 変数 u について $u \rightarrow -2$ のときの $\frac{u^2 - u - 6}{u + 2}$ の極限を調べよ.

$u \neq -2$ のとき

$$\frac{u^2 - u - 6}{u + 2} = \frac{(\quad)(\quad)}{\quad} =$$

問2.4.1 変数 u について $u \rightarrow -2$ のときの $\frac{u^2 - u - 6}{u + 2}$ の極限を調べよ.

$u \neq -2$ のとき

$$\frac{u^2 - u - 6}{u + 2} = \frac{(u + 2)(u - 3)}{u + 2} = u - 3 .$$

よって

$$\lim_{u \rightarrow -2} \frac{u^2 - u - 6}{u + 2} = \lim_{u \rightarrow -2} (u - 3) = -2 - 3 = -5 .$$

終

問2.4.2 変数 x について $x \rightarrow 3$ のときの $\frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6}$ の極限を調べよ.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\quad}{\quad} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (\quad)}{\lim_{x \rightarrow 3} (\quad)} =$$

問2.4.2 変数 x について $x \rightarrow 3$ のときの $\frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6}$ の極限を調べよ.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x + 1)(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 1}{x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)} = \frac{7}{1} \\ &= 7 .\end{aligned}$$

終

問2.4.3 変数 t について $t \rightarrow 1$ のときの $\frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 2t + 3}$ の極限を調べよ.

$\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - 2t + 3) = 2 \neq 0$ なので,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 2t + 3} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

問2.4.3 変数 t について $t \rightarrow 1$ のときの $\frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 2t + 3}$ の極限を調べよ.

$\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - 2t + 3) = 2 \neq 0$ なので,

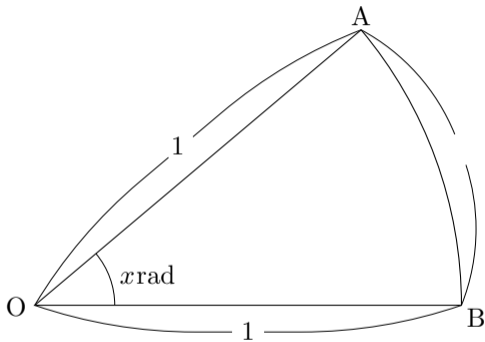
$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 2t + 3} = \frac{\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - 3t + 2)}{\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - 2t + 3)} = \frac{0}{2} = 0 .$$

終

変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\sin x}{x}$ の極限を調べる.

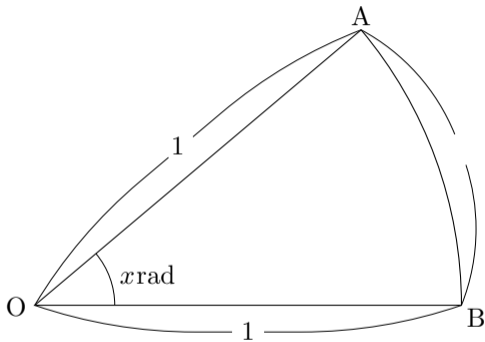
変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\sin x}{x}$ の極限を調べる.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする. 右図のよ
うに, 点 O, A, B を頂点とする扇
形 OAB の半径が 1 であり, 中心
角 AOB の弧度法による大きさが
 $x \text{ rad}$ であるとする.



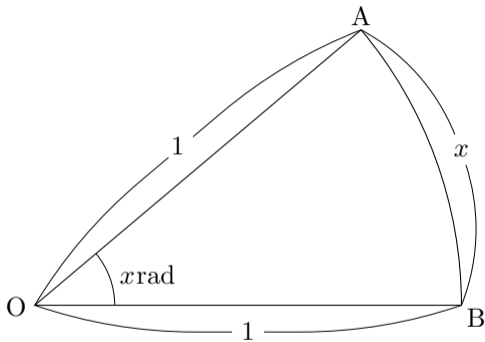
変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\sin x}{x}$ の極限を調べる.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする. 右図のよ
うに, 点 O, A, B を頂点とする扇
形 OAB の半径が 1 であり, 中心
角 AOB の弧度法による大きさが
 $x \text{ rad}$ であるとする. 弧 AB の長
さは $\widehat{AB} =$.



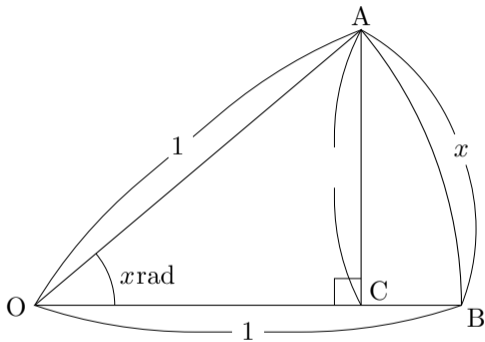
変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\sin x}{x}$ の極限を調べる.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする. 右図のよ
うに, 点 O, A, B を頂点とする扇
形 OAB の半径が 1 であり, 中心
角 AOB の弧度法による大きさが
 $x \text{ rad}$ であるとする. 弧 AB の長
さは $\widehat{AB} = x$.



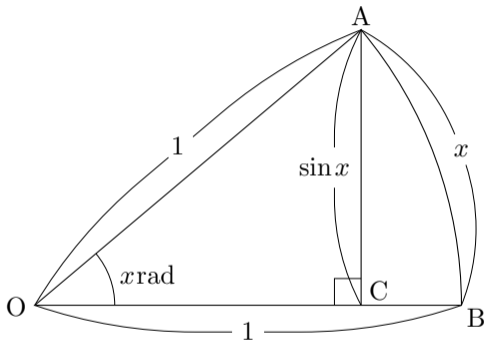
変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\sin x}{x}$ の極限を調べる.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする. 右図のよ
うに, 点 O, A, B を頂点とする扇
形 OAB の半径が 1 であり, 中心
角 AOB の弧度法による大きさが
 $x \text{ rad}$ であるとする. 弧 AB の長
さは $\widehat{AB} = x$. 点 C は線分 OB
に属し, 直線 OB と直線 AC と
は垂直であるとする. 線分 AC の
長さは $\overline{AC} =$.



変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\sin x}{x}$ の極限を調べる.

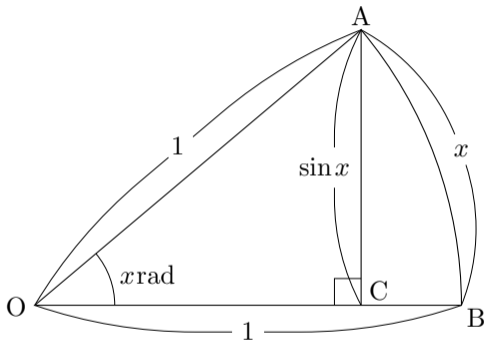
$0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする. 右図のよ
うに, 点 O, A, B を頂点とする扇
形 OAB の半径が 1 であり, 中心
角 AOB の弧度法による大きさが
 $x \text{ rad}$ であるとする. 弧 AB の長
さは $\widehat{AB} = x$. 点 C は線分 OB
に属し, 直線 OB と直線 AC と
は垂直であるとする. 線分 AC の
長さは $\overline{AC} = \sin x$.



変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\sin x}{x}$ の極限を調べる.

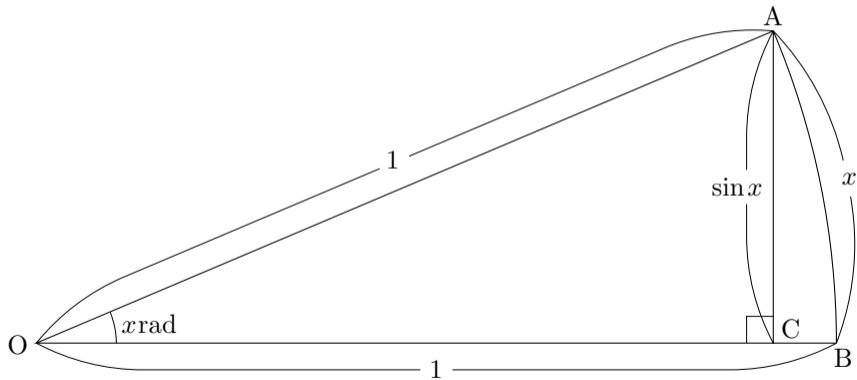
$0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする. 右図のよ
うに, 点 O, A, B を頂点とする扇
形 OAB の半径が 1 であり, 中心
角 AOB の弧度法による大きさが
 $x \text{ rad}$ であるとする. 弧 AB の長
さは $\widehat{AB} = x$. 点 C は線分 OB
に属し, 直線 OB と直線 AC と
は垂直であるとする. 線分 AC の
長さは $\overline{AC} = \sin x$. よって

$$\frac{\overline{AC}}{\widehat{AB}} = \frac{\sin x}{x} .$$



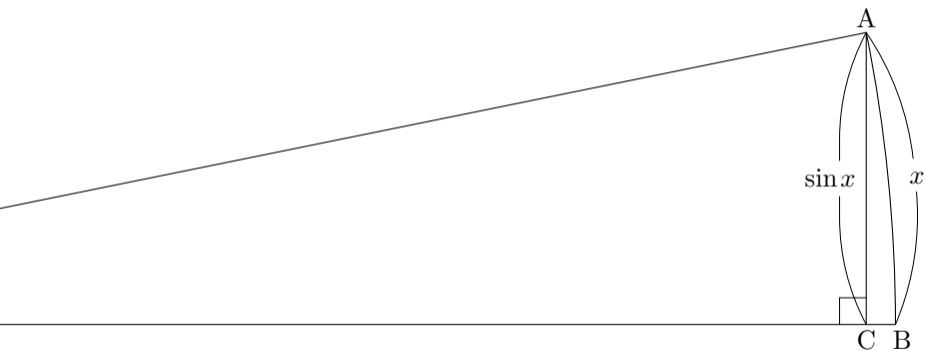
$x = 0.4$ のとき，以下の図のようになり，

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \doteq 0.9735.$$



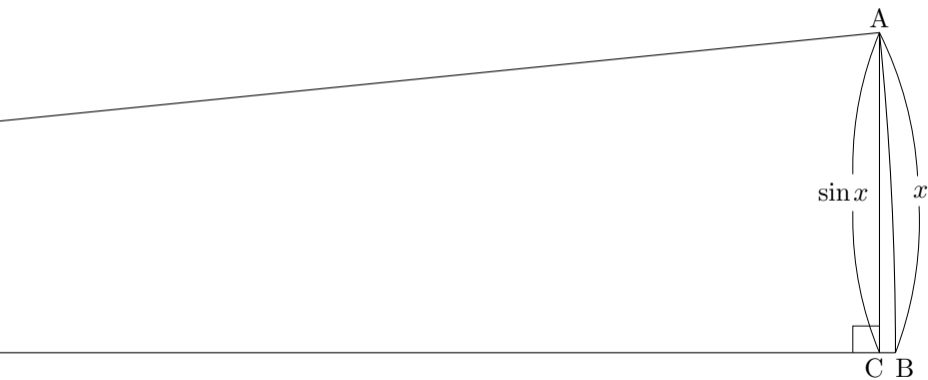
$x = 0.2$ のとき, A, B, C の部分を拡大すると以下の図のようになり,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \doteq 0.9933.$$



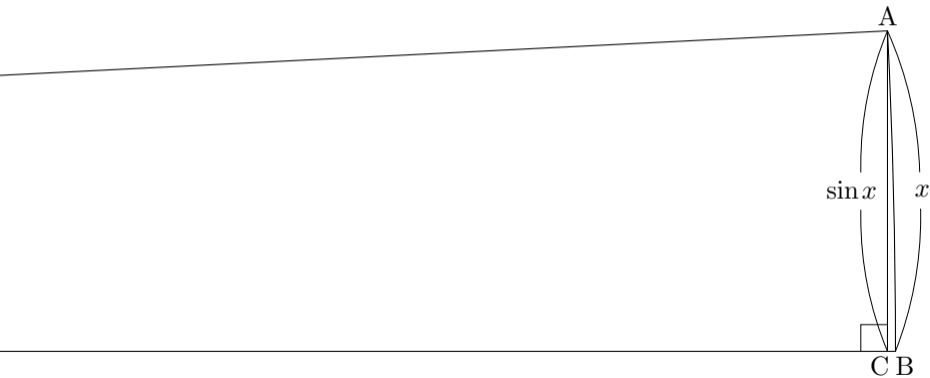
$x = 0.1$ のとき, A, B, C の部分を拡大すると以下の図のようになり,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \doteq 0.9983.$$



$x = 0.05$ のとき, A, B, C の部分を拡大すると以下の図のようになり,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \doteq 0.9996.$$



このように、変数 x の値を 0 に限りなく近づけると、 $\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ の値は 1 に限りなく近づく。

このように、変数 x の値を 0 に限りなく近づけると、 $\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ の値は 1 に限りなく近づく。

[定理 2.4] 変数 x について $x \rightarrow 0$ のとき $\frac{\sin x}{x}$ は 1 に収束する：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

例 変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\sin 3x}{x}$ の極限を調べる.

例 変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\sin 3x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 3x$ とおく. $x = \frac{y}{3}$ なので,

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{\sin y}{\frac{y}{3}} = 3 \cdot \frac{\sin y}{y} .$$

例 変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\sin 3x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 3x$ とおく. $x = \frac{y}{3}$ なので,

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{\sin y}{\frac{y}{3}} = 3 \cdot \frac{\sin y}{y} .$$

$x \rightarrow 0$ のとき, $y = 3x \rightarrow 0$, $y \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{\sin y}{y} \right)$$

[定理 2.3.3] 変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて, $f(x) = g(y)$ で, 定数 a と b とについて, 変数 x について $x \rightarrow a$ のとき $y \rightarrow b$, $y \neq b$ とする. $y \rightarrow b$ のとき $g(y)$ が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) .$$

例 変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\sin 3x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 3x$ とおく. $x = \frac{y}{3}$ なので,

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{\sin y}{\frac{y}{3}} = 3 \cdot \frac{\sin y}{y} .$$

$x \rightarrow 0$ のとき, $y = 3x \rightarrow 0$, $y \neq 0$. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{\sin y}{y} \right) = 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 3 \cdot 1 = 3 .$$

終

問2.4.4 変数 t について $t \rightarrow 0$ のときの $\frac{\sin \frac{t}{4}}{t}$ の極限を調べよ.

変数 x を $x =$ とおく. $t =$. $t \rightarrow 0$ のとき $x \rightarrow 0$ なので、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{4}}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \quad \cdot 1 = \quad .$$

問2.4.4 変数 t について $t \rightarrow 0$ のときの $\frac{\sin \frac{t}{4}}{t}$ の極限を調べよ.

変数 x を $x = \frac{t}{4}$ とおく. $t = 4x$. $t \rightarrow 0$ のとき $x \rightarrow 0$ なので、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{4}}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} .$$

終

例 変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\tan 5x}{x}$ の極限を調べる.

例 変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\tan 5x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 5x$ とおく. $x = \frac{y}{5}$.

例 変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\tan 5x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 5x$ とおく. $x = \frac{y}{5}$.

$$\frac{\tan 5x}{x} = \frac{\tan y}{\frac{y}{5}} = 5 \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = 5 \cdot \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y} .$$

例 変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\tan 5x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 5x$ とおく. $x = \frac{y}{5}$.

$$\frac{\tan 5x}{x} = \frac{\tan y}{\frac{y}{5}} = 5 \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = 5 \cdot \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y} .$$

$x \rightarrow 0$ のとき $y = 5x \rightarrow 0$. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. 関数 $\cos x$ は連続なので
 $\lim_{y \rightarrow 0} \cos y = \cos 0 = 1$.

例 変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\tan 5x}{x}$ の極限を調べる.

変数 y を $y = 5x$ とおく. $x = \frac{y}{5}$.

$$\frac{\tan 5x}{x} = \frac{\tan y}{\frac{y}{5}} = 5 \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = 5 \cdot \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y}.$$

$x \rightarrow 0$ のとき $y = 5x \rightarrow 0$. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. 関数 $\cos x$ は連続なので
 $\lim_{y \rightarrow 0} \cos y = \cos 0 = 1$. よって

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(5 \cdot \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y} \right) = 5 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \cos y} = 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} \\ &= 5. \end{aligned}$$

終

問2.4.5 変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\tan \frac{x}{3}}{x}$ の極限を調べよ.

変数 y を $y =$ とおく. $x =$.

$$\frac{\tan \frac{x}{3}}{x} = \frac{\tan y}{\cos y} = \frac{1}{\cos y} \frac{\sin y}{y} = \frac{\sin y}{y} \frac{1}{\cos y} .$$

$x \rightarrow 0$ のとき $y \rightarrow 0$. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ なので,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{x}{3}}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \frac{1}{\cos y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \cos y} = 1 \cdot \frac{1}{1} \\ &= 1 . \end{aligned}$$

問2.4.5 変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\tan \frac{x}{3}}{x}$ の極限を調べよ.

変数 y を $y = \frac{x}{3}$ とおく. $x = 3y$.

$$\frac{\tan \frac{x}{3}}{x} = \frac{\tan y}{3y} = \frac{1}{3y} \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{1}{3} \frac{\sin y}{y} \frac{1}{\cos y}.$$

$x \rightarrow 0$ のとき $y \rightarrow 0$. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ なので,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{x}{3}}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \frac{1}{\cos y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \cos y} = 1 \cdot \frac{1}{1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

問2.4.5 変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $\frac{\tan \frac{x}{3}}{x}$ の極限を調べよ.

変数 y を $y = \frac{x}{3}$ とおく. $x = 3y$.

$$\frac{\tan \frac{x}{3}}{x} = \frac{\tan y}{3y} = \frac{1}{3y} \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{1}{3} \frac{\sin y}{y} \frac{1}{\cos y}.$$

$x \rightarrow 0$ のとき $y \rightarrow 0$. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ なので,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{x}{3}}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \frac{\sin y}{y} \frac{1}{\cos y} \right) = \frac{1}{3} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \cos y} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

終