

2.2 関数の連続性

例 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = x^2$ について, $x \rightarrow 3$ のときの極限がどうなるか考える.

例 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = x^2$ について, $x \rightarrow 3$ のときの極限がどうなるか考える. x の値を 3 より大きい範囲で 3 に近づけていく:

$$x = 3.1 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.1^2 = 9.61 ,$$

$$x = 3.001 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.001^2 = 9.006001 ,$$

$$x = 3.00001 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.00001^2 = 9.0000600001 ,$$

\vdots .

例 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = x^2$ について、 $x \rightarrow 3$ のときの極限がどうなるか考える。 x の値を 3 より大きい範囲で 3 に近づけていく：

$$x = 3.1 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.1^2 = 9.61 ,$$

$$x = 3.001 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.001^2 = 9.006001 ,$$

$$x = 3.00001 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.00001^2 = 9.0000600001 ,$$

\vdots .

x の値を 3 より小さい範囲で 3 に近づけていく：

$$x = 2.9 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.9^2 = 8.41 ,$$

$$x = 2.999 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.999^2 = 8.994001 ,$$

$$x = 2.99999 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.99999^2 = 8.9999400001 ,$$

\vdots .

例 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = x^2$ について、 $x \rightarrow 3$ のときの極限がどうなるか考える。 x の値を 3 より大きい範囲で 3 に近づけていく：

$$x = 3.1 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.1^2 = 9.61 ,$$

$$x = 3.001 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.001^2 = 9.006001 ,$$

$$x = 3.00001 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.00001^2 = 9.0000600001 ,$$

⋮ .

x の値を 3 より小さい範囲で 3 に近づけていく：

$$x = 2.9 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.9^2 = 8.41 ,$$

$$x = 2.999 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.999^2 = 8.994001 ,$$

$$x = 2.99999 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.99999^2 = 8.9999400001 ,$$

⋮ .

このように、 $x \rightarrow 3$ のとき $\varphi(x)$ は 9 に収束する： $\lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x) = 9$. この極限值 9 は $\varphi(3)$ の値である： $\varphi(3) = 3^2 = 9$. よって $\lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x) = \varphi(3)$. **終**

関数 f と実数 a について、 $f(a)$ の値があるとき、つまり a が関数 f の定義域に属するとき、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ であるのが普通である。このようなとき、 a において f は連続であるという。

関数 f と実数 a について、 $f(a)$ の値があるとき、つまり a が関数 f の定義域に属するとき、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ であるのが普通である。このようなとき、 a において f は連続であるという。

[定義] 関数 f の定義域の実数 a において f が連続であるとは、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が収束して $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ であることである。

区間 I において関数 f が連続であるとは、 I の各実数において f が連続であることである。

関数 f が連続であるとは、 f が定義域の各実数において連続であることである。

[定理 2.2.1] 定数関数は連続である.

例 定数関は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow 3} 7 = 7 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \left(-\frac{9}{4} \right) = -\frac{9}{4} ,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \sin 2 = \sin 2 .$$

終

[定理 2.2.2] 冪関数は連続である.

例 冪関数 x^3 は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = (-2)^3 = -8 .$$

冪関数 $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{x} = \sqrt{7} .$$

終

[定理 2.2.3] 指数関数及び対数関数は連続である.

例 指数関数 2^x は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow 5} 2^x = 2^5 = 32 .$$

対数関数 $\log_3 x$ は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow 8} \log_3 x = \log_3 8 .$$

終

[定理 2.2.4] 三角関数及び逆三角関数は連続である.

[例] 正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos : x$ は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sin x = \sin 2 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ 及び逆正接関数 $\tan^{-1}x$ は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sin^{-1}x = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \tan^{-1}x = \tan^{-1}6 .$$

終

このように，“通常”関数 f は定義域に属す実数 a において連続なので，

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; このとき，極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は結局 $f(x)$ の x に a を代入した値 $f(a)$ なので，わざわざ極限值を考える意味がない.

このように，“通常”関数 f は定義域に属す実数 a において連続なので，

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; このとき，極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は結局 $f(x)$ の x に a を代入した値 $f(a)$ なので，わざわざ極限值を考える意味がない．しかし，前節で述べた関数 $\psi(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ ($x \neq 2$) では， x に 2 を代入できない，つまり $\psi(2)$ の値が無い；このようなときしばしば極限值 $\lim_{x \rightarrow 2} \psi(x)$ を考えることが有用になる．