2.0 速度

“極限”という数学の新しい概念を導入する. “極限”の概念が必要になる身近な例は“速度”である.

$\boxed{\text{例}}$ 地上で物体が自由落下し始めてからの時間（単位は秒）に対する落下速度（単位は $\mathrm{m/s}$ ）を考える．0 以上の実数 t に対して，t 秒後の落下距離（単位は m ）を $\varphi(t)$ とおく．

$\boxed{例}$ 地上で物体が自由落下し始めてからの時間（単位は秒）に対する落下速度（単位は $\mathrm{m/s}$ ）を考える．0 以上の実数 t に対して，t 秒後の落下距離（単位は m ）を $\varphi(t)$ とおく．落下を高速度撮影して計測するとほぼ $\varphi(t) = 4.9t^2$ であると分かる．

例 地上で物体が自由落下し始めてからの時間（単位は秒）に対する落下速度（単位は $\mathrm{m/s}$ ）を考える．0 以上の実数 t に対して，t 秒後の落下距離（単位は m ）を $\varphi(t)$ とおく．落下を高速度撮影して計測するとほぼ $\varphi(t) = 4.9t^2$ であると分かる．

落下時間における落下距離に対して，

$$\text{落下の平均速度} = \frac{\text{落下距離}}{\text{落下時間}} .$$

$\boxed{\text{例}}$ 地上で物体が自由落下し始めてからの時間（単位は秒）に対する落下速度（単位は m/s ）を考える．0 以上の実数 t に対して，t 秒後の落下距離（単位は m ）を $\varphi(t)$ とおく．落下を高速度撮影して計測するとほぼ $\varphi(t) = 4.9t^2$ であると分かる．

落下時間における落下距離に対して，

$$\text{落下の平均速度} = \frac{\text{落下距離}}{\text{落下時間}} \ .$$

例えば，落下開始 3 秒後から 5 秒後までの 2 秒間に，落下距離は $\varphi(3) = 4.9 \times 3^2 = 44.1$ から $\varphi(5) = 4.9 \times 5^2 = 122.5$ に変化するので，この間の落下距離は $\varphi(5) - \varphi(3) = 122.5 - 44.1$ で，この間の落下の平均速度は

$$\frac{\varphi(5) - \varphi(3)}{5-3} = \frac{122.5 - 44.1}{2} = 39.2 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 地上で物体が自由落下し始めてからの時間（単位は秒）に対する落下速度（単位は m/s ）を考える．0 以上の実数 t に対して，t 秒後の落下距離（単位は m ）を $\varphi(t)$ とおく．落下を高速度撮影して計測するとほぼ $\varphi(t) = 4.9t^2$ であると分かる．

落下時間における落下距離に対して，

$$\text{落下の平均速度} = \frac{\text{落下距離}}{\text{落下時間}} .$$

例えば，落下開始 3 秒後から 5 秒後までの 2 秒間に，落下距離は $\varphi(3) = 4.9 \times 3^2 = 44.1$ から $\varphi(5) = 4.9 \times 5^2 = 122.5$ に変化するので，この間の落下距離は $\varphi(5) - \varphi(3) = 122.5 - 44.1$ で，この間の落下の平均速度は

$$\frac{\varphi(5) - \varphi(3)}{5 - 3} = \frac{122.5 - 44.1}{2} = 39.2 .$$

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(3)}{t - 3}$ である．

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．落下開始 3 秒後から，

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．落下開始 3 秒後から，

$$3.1 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.1)-\varphi(3)}{3.1-3} = 29.89 \text{ ，}$$

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．落下開始 3 秒後から，

$$3.1 \text{ 秒後までの平均速度は } \quad \frac{\varphi(3.1)-\varphi(3)}{3.1-3} = 29.89 \ ,$$

$$3.01 \text{ 秒後までの平均速度は } \quad \frac{\varphi(3.01)-\varphi(3)}{3.01-3} = 29.449 \ ,$$

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．落下開始 3 秒後から，

$$3.1 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.1)-\varphi(3)}{3.1-3} = 29.89 \text{ ，}$$

$$3.01 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.01)-\varphi(3)}{3.01-3} = 29.449 \text{ ，}$$

$$3.001 \text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.001-3} = 29.4049 \text{ ，}$$

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．落下開始 3 秒後から，

$$3.1\text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.1)-\varphi(3)}{3.1-3}=29.89\ ,$$

$$3.01\text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.01)-\varphi(3)}{3.01-3}=29.449\ ,$$

$$3.001\text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.001-3}=29.4049\ ,$$

$$3.0001\text{ 秒後までの平均速度は } \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.0001-3}=29.40049\ ,$$

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．落下開始 3 秒後から，

$$
\begin{aligned}
3.1\text{ 秒後までの平均速度は }&\ \frac{\varphi(3.1)-\varphi(3)}{3.1-3}=29.89\ ,\\
3.01\text{ 秒後までの平均速度は }&\ \frac{\varphi(3.01)-\varphi(3)}{3.01-3}=29.449\ ,\\
3.001\text{ 秒後までの平均速度は }&\ \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.001-3}=29.4049\ ,\\
3.0001\text{ 秒後までの平均速度は }&\ \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.0001-3}=29.40049\ ,\\
3.00001\text{ 秒後までの平均速度は }&\ \frac{\varphi(3.0001)-\varphi(3)}{3.00001-3}=29.400049\ ,\\
&\ \vdots \qquad\qquad .
\end{aligned}
$$

変数 t に対して，落下開始 3 秒後から t 秒後までの落下の平均速度は $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ である．落下開始 3 秒後から，

$$\begin{aligned}
3.1\text{ 秒後までの平均速度は }\ & \frac{\varphi(3.1)-\varphi(3)}{3.1-3}=29.89\ ,\\
3.01\text{ 秒後までの平均速度は }\ & \frac{\varphi(3.01)-\varphi(3)}{3.01-3}=29.449\ ,\\
3.001\text{ 秒後までの平均速度は }\ & \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.001-3}=29.4049\ ,\\
3.0001\text{ 秒後までの平均速度は }\ & \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.0001-3}=29.40049\ ,\\
3.00001\text{ 秒後までの平均速度は }\ & \frac{\varphi(3.0001)-\varphi(3)}{3.00001-3}=29.400049\ ,\\
& \vdots \qquad\qquad .
\end{aligned}$$

変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく．

このように，変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく.

このように，変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく．t の値を 3 に近づけていくことは，3 秒後から t 秒後までの時間を 0 に近づける，つまり瞬間に近づけることである．

このように，変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく．t の値を 3 に近づけていくことは，3 秒後から t 秒後までの時間を 0 に近づける，つまり瞬間に近づけることである．そこで，落下開始 3 秒後の瞬間の速度は $29.4\mathrm{m/s}$ であると考える．

　このように，変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく．t の値を 3 に近づけていくことは，3 秒後から t 秒後までの時間を 0 に近づける，つまり瞬間に近づけることである．そこで，落下開始 3 秒後の瞬間の速度は 29.4m/s であると考える．つまり，落下開始 3 秒後の瞬間速度は，

　変数 t の値を 3 に近づけるとき落下の平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ が近づく値である．この瞬間速度を単に速度という． $\boxed{\text{終}}$

このように，変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく．t の値を 3 に近づけていくことは，3 秒後から t 秒後までの時間を 0 に近づける，つまり瞬間に近づけることである．そこで，落下開始 3 秒後の瞬間の速度は 29.4m/s であると考える．つまり，落下開始 3 秒後の瞬間速度は，

変数 t の値を 3 に近づけるとき落下の平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ が近づく値である．この瞬間速度を単に速度という．　終

このように，“瞬間速度”の概念を数学的に定義する際に，“変数 t の値を定数 a に近づけるとき t の関数の値が近づく値”ということを考える．

このように，変数 t の値を 3 に近づけていくと，落下開始 3 秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていく．t の値を 3 に近づけていくことは，3 秒後から t 秒後までの時間を 0 に近づける，つまり瞬間に近づけることである．そこで，落下開始 3 秒後の瞬間の速度は 29.4m/s であると考える．つまり，落下開始 3 秒後の瞬間速度は，

変数 t の値を 3 に近づけるとき落下の平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ が近づく値である．この瞬間速度を単に速度という． 終

このように，“瞬間速度”の概念を数学的に定義する際に，“変数 t の値を定数 a に近づけるとき t の関数の値が近づく値”ということを考える．このような概念を極限という．極限の概念はこれから学ぶ微分積分において大変重要である．