

## 1.6 数学的帰納法

“将棋倒し”という言葉がある。将棋の駒を適切な間隔で一列に並べる。

“将棋倒し”という言葉がある。将棋の駒を適切な間隔で一列に並べる。まず、1番めの駒が倒れるとする。

倒れる



1番

“将棋倒し”という言葉がある。将棋の駒を適切な間隔で一列に並べる。まず、1番めの駒が倒れるとする。

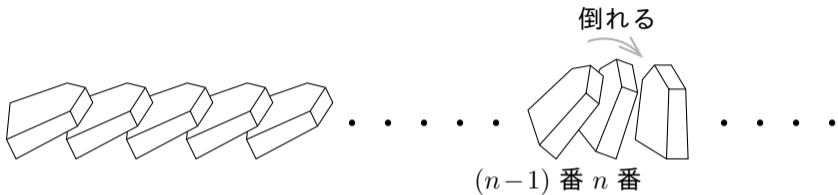
倒れる



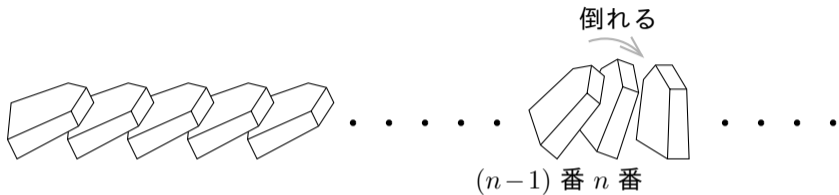
1番

このとき、2番めの駒が倒れて、3番めの駒が倒れて、4番めの駒が倒れて、…と駒が順に倒れていく。

2以上の自然数  $n$  について、 $(n-1)$  番めの駒が倒れると必ず次の  $n$  番めの駒も倒れるとする。



2以上の自然数  $n$  について、 $(n-1)$  番めの駒が倒れると必ず次の  $n$  番めの駒も倒れるとする。



このとき、結局総ての駒が倒れる。



つまり、次の2つのことが成り立つとき総ての駒が倒れる：

(1) 1番めの駒が倒れる；

(2) 2以上の各自然数  $n$  について、 $(n-1)$ 番めの駒が倒れると次の  $n$ 番めの駒も倒れる。

数学においてこの将棋倒しに似た論法が使われる。

正の自然数  $n$  に関する条件  $\mathcal{P}(n)$  について、次の2つのことが成り立つとする：

(1)  $\mathcal{P}(1)$  である；

(2) 2以上の各自然数  $n$  について、 $\mathcal{P}(n-1)$  であるならば  $\mathcal{P}(n)$  である。

この2つのことから、次のようにして、 $\mathcal{P}(2)$  であること、 $\mathcal{P}(3)$  であること、 $\mathcal{P}(4)$  であること、などが導かれる。

$P(1)$  である (条件 (1))    $P(1)$  ならば  $P(2)$  である (条件 (2))

この2つから

$P(2)$  である

$P(2)$  ならば  $P(3)$  である (条件 (2))

この2つから

$P(3)$  である

$P(3)$  ならば  $P(4)$  である (条件 (2))

この2つから

$P(4)$  である

$P(1)$  である (条件 (1))  $P(1)$  ならば  $P(2)$  である (条件 (2))

この2つから

$P(2)$  である

$P(2)$  ならば  $P(3)$  である (条件 (2))

この2つから

$P(3)$  である

$P(3)$  ならば  $P(4)$  である (条件 (2))

この2つから

$P(4)$  である

以下同様にして、 $P(5)$  であること、 $P(6)$  であること、 $P(7)$  であること、 $P(8)$  であること、などが導かれる。

$P(1)$  である (条件 (1))  $P(1)$  ならば  $P(2)$  である (条件 (2))

この2つから

$P(2)$  である

$P(2)$  ならば  $P(3)$  である (条件 (2))

この2つから

$P(3)$  である

$P(3)$  ならば  $P(4)$  である (条件 (2))

この2つから

$P(4)$  である

以下同様にして、 $P(5)$  であること、 $P(6)$  であること、 $P(7)$  であること、 $P(8)$  であること、などが導かれる。結局、任意の正の自然数  $n$  について  $P(n)$  である。

$P(1)$  である (条件 (1))  $P(1)$  ならば  $P(2)$  である (条件 (2))

この2つから

$P(2)$  である

$P(2)$  ならば  $P(3)$  である (条件 (2))

この2つから

$P(3)$  である

$P(3)$  ならば  $P(4)$  である (条件 (2))

この2つから

$P(4)$  である

以下同様にして、 $P(5)$  であること、 $P(6)$  であること、 $P(7)$  であること、 $P(8)$  であること、などが導かれる。結局、任意の正の自然数  $n$  について  $P(n)$  である。

このような推論法を数学的帰納法という。

法則（数学的帰納法） 正の自然数  $n$  に関する条件  $\mathcal{P}(n)$  について、次の2つのことが成り立つとする：

(1)  $\mathcal{P}(1)$  である；

(2) 2以上の各自然数  $n$  について、 $\mathcal{P}(n-1)$  であると仮定すると  $\mathcal{P}(n)$  である。

このとき、任意の正の自然数  $n$  について  $\mathcal{P}(n)$  である。

自然数  $n$  に関する条件  $\mathcal{P}(n)$  について, 任意の自然数  $n$  について  $\mathcal{P}(n)$  であることを示すためには, 0 から数学的帰納法を始める.

自然数  $n$  に関する条件  $\mathcal{P}(n)$  について、任意の自然数  $n$  について  $\mathcal{P}(n)$  であることを示すためには、0 から数学的帰納法を始める。

法則（数学的帰納法） 自然数  $n$  に関する条件  $\mathcal{P}(n)$  について、次の2つのことが成り立つとする：

- (1)  $\mathcal{P}(0)$  である；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、 $\mathcal{P}(n-1)$  であると仮定すると  $\mathcal{P}(n)$  である。  
このとき、任意の自然数  $n$  について  $\mathcal{P}(n)$  である。

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$  で、2以上の各自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  . 次のことを示す：任意の正の自然数  $n$  について  $a_n = n^2$  .

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$  で、2以上の各自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  . 次のことを示す：任意の正の自然数  $n$  について  $a_n = n^2$  . 数学的帰納法によって示すには次のようにする：

- (1) 等式  $a_n = n^2$  において  $n = 1$  とした等式  $a_1 = 1^2$  を示す；
- (2) 2以上の各自然数  $n$  について、漸化式  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  を用いて、等式  $a_{n-1} = (n-1)^2$  を仮定して等式  $a_n = n^2$  を導く.

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$  で、2以上の各自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  . 次のことを示す：任意の正の自然数  $n$  について  $a_n = n^2$  . 数学的帰納法によって示すには次のようにする：

- (1) 等式  $a_n = n^2$  において  $n = 1$  とした等式  $a_1 = 1^2$  を示す；
- (2) 2以上の各自然数  $n$  について、漸化式  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  を用いて、等式  $a_{n-1} = (n-1)^2$  を仮定して等式  $a_n = n^2$  を導く.

(1)  $a_1 = 1$  なので  $a_1 = 1^2$  .

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$  で、2以上の各自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  . 次のことを示す：任意の正の自然数  $n$  について  $a_n = n^2$  . 数学的帰納法によって示すには次のようにする：

- (1) 等式  $a_n = n^2$  において  $n = 1$  とした等式  $a_1 = 1^2$  を示す；
- (2) 2以上の各自然数  $n$  について、漸化式  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  を用いて、等式  $a_{n-1} = (n-1)^2$  を仮定して等式  $a_n = n^2$  を導く.

(1)  $a_1 = 1$  なので  $a_1 = 1^2$  .

(2) 2以上の自然数  $n$  について、 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  なので、 $a_{n-1} = (n-1)^2$  と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1 = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2 .$$

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$  で、2以上の各自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  . 次のことを示す：任意の正の自然数  $n$  について  $a_n = n^2$  . 数学的帰納法によって示すには次のようにする：

- (1) 等式  $a_n = n^2$  において  $n = 1$  とした等式  $a_1 = 1^2$  を示す；
- (2) 2以上の各自然数  $n$  について、漸化式  $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  を用いて、等式  $a_{n-1} = (n-1)^2$  を仮定して等式  $a_n = n^2$  を導く.

(1)  $a_1 = 1$  なので  $a_1 = 1^2$  .

(2) 2以上の自然数  $n$  について、 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$  なので、 $a_{n-1} = (n-1)^2$  と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1 = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2 .$$

故に、数学的帰納法により、任意の正の自然数  $n$  について  $a_n = n^2$  . 終

**問1.6.1** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$  で、2以上の各自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$  . 次のことを示せ：任意の正の自然数  $n$  について  $a_n = n^3$  . 数学的帰納法によって示すには次のようにする：

- (1) 等式  $a_n = n^3$  において  $n = 1$  とした等式  $a_1 = 1^3$  を示す；
- (2) 2以上の各自然数  $n$  について、漸化式  $a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$  を用いて、等式  $a_{n-1} = (n-1)^3$  を仮定して等式  $a_n = n^3$  を導く.

$a_1 = 1$  なので  $a_1 =$  .

2以上の各自然数  $n$  について、 $=$  と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1 =$$

故に、数学的帰納法により、任意の正の自然数  $n$  について  $a_n = n^3$  .

**問1.6.1** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$  で、2以上の各自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$  . 次のことを示せ：任意の正の自然数  $n$  について  $a_n = n^3$  . 数学的帰納法によって示すには次のようにする：

- (1) 等式  $a_n = n^3$  において  $n = 1$  とした等式  $a_1 = 1^3$  を示す；
- (2) 2以上の各自然数  $n$  について、漸化式  $a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$  を用いて、等式  $a_{n-1} = (n-1)^3$  を仮定して等式  $a_n = n^3$  を導く.

$$a_1 = 1 \text{ なので } a_1 = 1^3 .$$

2以上の各自然数  $n$  について、 $a_{n-1} = (n-1)^3$  と仮定すると

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1 = (n-1)^3 + 3n^2 - 3n + 1 \\ &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 3n^2 - 3n + 1 \\ &= n^3 . \end{aligned}$$

故に、数学的帰納法により、任意の正の自然数  $n$  について  $a_n = n^3$  . □

**問1.6.2** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  を次のように帰納的に定義する：  $a_1 = 4$  で、2 以上の任意の自然数  $n$  について  $a_n = \frac{4a_{n-1}}{a_{n-1} + 4}$  . 次のことを示せ：正の任意の自然

数  $n$  について  $a_n = \frac{4}{n}$  .

$a_1 = 4$  なので  $a_1 = -$  .

2 以上の自然数  $n$  について、 $a_{n-1} = \frac{4}{n-1}$  と仮定すると

$$a_n =$$

故に、数学的帰納法により、正の任意の自然数  $n$  について  $a_n = \frac{4}{n}$  .

**問1.6.2** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 4$  で、2 以上の任意の自然数  $n$  について  $a_n = \frac{4a_{n-1}}{a_{n-1} + 4}$  . 次のことを示せ：正の任意の自然

数  $n$  について  $a_n = \frac{4}{n}$  .

$$a_1 = 4 \text{ なので } a_1 = \frac{4}{1} .$$

2 以上の自然数  $n$  について、 $a_{n-1} = \frac{4}{n-1}$  と仮定すると

$$a_n = \frac{4a_{n-1}}{a_{n-1} + 4} = \frac{4 \cdot \frac{4}{n-1}}{\frac{4}{n-1} + 4} = \frac{\frac{4}{n-1}}{\frac{1}{n-1} + 1} = \frac{4}{1 + n - 1} = \frac{4}{n} .$$

故に、数学的帰納法により、正の任意の自然数  $n$  について  $a_n = \frac{4}{n}$  . □

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$  で、正の各自然数  $n$  について  $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  . 次のことを示す：任意の自然数  $n$  について  $a_n > 3$  .

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$  で、正の各自然数  $n$  について  $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  . 次のことを示す：任意の自然数  $n$  について  $a_n > 3$  . 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式  $a_n > 3$  において  $n = 0$  とした不等式  $a_0 > 3$  を示す；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、不等式  $a_{n-1} > 3$  を仮定して、不等式  $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$  を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  より不等式  $a_n > 3$  を導く.

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$  で、正の各自然数  $n$  について  $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  . 次のことを示す：任意の自然数  $n$  について  $a_n > 3$  . 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式  $a_n > 3$  において  $n = 0$  とした不等式  $a_0 > 3$  を示す；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、不等式  $a_{n-1} > 3$  を仮定して、不等式  $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$  を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  より不等式  $a_n > 3$  を導く.

(1)  $a_0 = 4$  なので  $a_0 > 3$  .

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$  で、正の各自然数  $n$  について  $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  . 次のことを示す：任意の自然数  $n$  について  $a_n > 3$  . 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式  $a_n > 3$  において  $n = 0$  とした不等式  $a_0 > 3$  を示す；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、不等式  $a_{n-1} > 3$  を仮定して、不等式  $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$  を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  より不等式  $a_n > 3$  を導く.

(1)  $a_0 = 4$  なので  $a_0 > 3$  .

(2) 正の自然数  $n$  について  $a_{n-1} > 3$  と仮定する.

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$  で、正の各自然数  $n$  について  $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  . 次のことを示す：任意の自然数  $n$  について  $a_n > 3$  . 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式  $a_n > 3$  において  $n = 0$  とした不等式  $a_0 > 3$  を示す；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、不等式  $a_{n-1} > 3$  を仮定して、不等式  $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$  を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  より不等式  $a_n > 3$  を導く.

(1)  $a_0 = 4$  なので  $a_0 > 3$  .

(2) 正の自然数  $n$  について  $a_{n-1} > 3$  と仮定する.

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9 ,$$

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$  で、正の各自然数  $n$  について  $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  . 次のことを示す：任意の自然数  $n$  について  $a_n > 3$  . 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式  $a_n > 3$  において  $n = 0$  とした不等式  $a_0 > 3$  を示す；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、不等式  $a_{n-1} > 3$  を仮定して、不等式  $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$  を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  より不等式  $a_n > 3$  を導く.

(1)  $a_0 = 4$  なので  $a_0 > 3$  .

(2) 正の自然数  $n$  について  $a_{n-1} > 3$  と仮定する.

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9 ,$$

$$\sqrt{a_{n-1} + 6} > \sqrt{9} = 3 ,$$

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$  で、正の各自然数  $n$  について  $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  . 次のことを示す：任意の自然数  $n$  について  $a_n > 3$  . 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式  $a_n > 3$  において  $n = 0$  とした不等式  $a_0 > 3$  を示す；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、不等式  $a_{n-1} > 3$  を仮定して、不等式  $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$  を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  より不等式  $a_n > 3$  を導く.

(1)  $a_0 = 4$  なので  $a_0 > 3$  .

(2) 正の自然数  $n$  について  $a_{n-1} > 3$  と仮定する.

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9 ,$$

$$\sqrt{a_{n-1} + 6} > \sqrt{9} = 3 ,$$

$a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  なので  $a_n > 3$  .

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$  で、正の各自然数  $n$  について  $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  . 次のことを示す：任意の自然数  $n$  について  $a_n > 3$  . 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式  $a_n > 3$  において  $n = 0$  とした不等式  $a_0 > 3$  を示す；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、不等式  $a_{n-1} > 3$  を仮定して、不等式  $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$  を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  より不等式  $a_n > 3$  を導く.

(1)  $a_0 = 4$  なので  $a_0 > 3$  .

(2) 正の自然数  $n$  について  $a_{n-1} > 3$  と仮定する.

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9 ,$$

$$\sqrt{a_{n-1} + 6} > \sqrt{9} = 3 ,$$

$a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  なので  $a_n > 3$  . つまり、正の各自然数  $n$  について、 $a_{n-1} > 3$  と仮定すると  $a_n > 3$  .

**例** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$  で、正の各自然数  $n$  について  $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  . 次のことを示す：任意の自然数  $n$  について  $a_n > 3$  . 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式  $a_n > 3$  において  $n = 0$  とした不等式  $a_0 > 3$  を示す；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、不等式  $a_{n-1} > 3$  を仮定して、不等式  $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$  を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  より不等式  $a_n > 3$  を導く.

(1)  $a_0 = 4$  なので  $a_0 > 3$  .

(2) 正の自然数  $n$  について  $a_{n-1} > 3$  と仮定する.

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9 ,$$

$$\sqrt{a_{n-1} + 6} > \sqrt{9} = 3 ,$$

$a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$  なので  $a_n > 3$  . つまり、正の各自然数  $n$  について、 $a_{n-1} > 3$  と仮定すると  $a_n > 3$  .

故に、数学的帰納法により、任意の自然数  $n$  に対して  $a_n > 3$  .

**終**

**問1.6.3** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する：  $a_0 = 7$  で、正の各自然数  $n$  に対して  $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$  . 次のことを示せ：任意の自然数  $n$  に対して  $a_n > 5$  .

**問1.6.3** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 7$  で、正の各自然数  $n$  に対して  $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$  . 次のことを示せ：任意の自然数  $n$  に対して  $a_n > 5$  . 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式  $a_n > 5$  において  $n = 0$  とした不等式  $a_0 > 5$  を示す；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、不等式  $a_{n-1} > 5$  を仮定して、不等式  $\sqrt{3a_{n-1} + 10} > 5$  を導き、 $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$  より不等式  $a_n > 5$  を導く.

**問1.6.3** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 7$  で、正の各自然数  $n$  に対して  $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$  . 次のことを示せ：任意の自然数  $n$  に対して  $a_n > 5$  . 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式  $a_n > 5$  において  $n = 0$  とした不等式  $a_0 > 5$  を示す；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、不等式  $a_{n-1} > 5$  を仮定して、不等式  $\sqrt{3a_{n-1} + 10} > 5$  を導き、 $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$  より不等式  $a_n > 5$  を導く.

(1)  $a_0 = 7$  なので  $a_0 > 5$  .

**問1.6.3** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 7$  で、正の各自然数  $n$  に対して  $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$  . 次のことを示せ：任意の自然数  $n$  に対して  $a_n > 5$  . 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式  $a_n > 5$  において  $n = 0$  とした不等式  $a_0 > 5$  を示す；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、不等式  $a_{n-1} > 5$  を仮定して、不等式  $\sqrt{3a_{n-1} + 10} > 5$  を導き、 $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$  より不等式  $a_n > 5$  を導く.

(1)  $a_0 = 7$  なので  $a_0 > 5$  .

(2) 正の自然数  $n$  について  $a_{n-1} > 5$  と仮定する.

**問1.6.3** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 7$  で、正の各自然数  $n$  に対して  $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$  . 次のことを示せ：任意の自然数  $n$  に対して  $a_n > 5$  . 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式  $a_n > 5$  において  $n = 0$  とした不等式  $a_0 > 5$  を示す；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、不等式  $a_{n-1} > 5$  を仮定して、不等式  $\sqrt{3a_{n-1} + 10} > 5$  を導き、 $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$  より不等式  $a_n > 5$  を導く.

(1)  $a_0 = 7$  なので  $a_0 > 5$  .

(2) 正の自然数  $n$  について  $a_{n-1} > 5$  と仮定する.

$$3a_{n-1} > 3 \cdot 5 = 15 ,$$

$$3a_{n-1} + 10 > 15 + 10 = 25 ,$$

$$\sqrt{3a_{n-1} + 10} > \sqrt{25} = 5 ,$$

$a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$  なので  $a_n > 5$  . つまり、正の各自然数  $n$  について、 $a_{n-1} > 5$  と仮定すると  $a_n > 5$  .

**問1.6.3** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 7$  で、正の各自然数  $n$  に対して  $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$  . 次のことを示せ：任意の自然数  $n$  に対して  $a_n > 5$  . 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式  $a_n > 5$  において  $n = 0$  とした不等式  $a_0 > 5$  を示す；
- (2) 正の各自然数  $n$  について、不等式  $a_{n-1} > 5$  を仮定して、不等式  $\sqrt{3a_{n-1} + 10} > 5$  を導き、 $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$  より不等式  $a_n > 5$  を導く.

(1)  $a_0 = 7$  なので  $a_0 > 5$  .

(2) 正の自然数  $n$  について  $a_{n-1} > 5$  と仮定する.

$$3a_{n-1} > 3 \cdot 5 = 15 ,$$

$$3a_{n-1} + 10 > 15 + 10 = 25 ,$$

$$\sqrt{3a_{n-1} + 10} > \sqrt{25} = 5 ,$$

$a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$  なので  $a_n > 5$  . つまり、正の各自然数  $n$  について、 $a_{n-1} > 5$  と仮定すると  $a_n > 5$  .

故に、数学的帰納法により、任意の自然数  $n$  に対して  $a_n > 5$  .

終

第 0 項から始まる数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が公差  $d$  の等差数列であるとする．正の自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1} + d$  . 次のことを数学的帰納法により証明する：  
任意の自然数  $n$  について  $a_n = a_0 + dn$  .

第 0 項から始まる数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が公差  $d$  の等差数列であるとする．正の自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1} + d$ ．次のことを数学的帰納法により証明する：

任意の自然数  $n$  について  $a_n = a_0 + dn$ ．

$d \cdot 0 = 0$  なので  $a_0 = a_0 + d \cdot 0$ ．

第 0 項から始まる数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が公差  $d$  の等差数列であるとする．正の自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1} + d$ ．次のことを数学的帰納法により証明する：

任意の自然数  $n$  について  $a_n = a_0 + dn$ ．

$d \cdot 0 = 0$  なので  $a_0 = a_0 + d \cdot 0$ ．

正の各自然数  $n$  について， $a_n = a_{n-1} + d$  なので， $a_{n-1} = a_0 + d(n-1)$  と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + d = a_0 + d(n-1) + d = a_0 + dn .$$

第 0 項から始まる数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が公差  $d$  の等差数列であるとする．正の自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1} + d$ ．次のことを数学的帰納法により証明する：

任意の自然数  $n$  について  $a_n = a_0 + dn$ ．

$d \cdot 0 = 0$  なので  $a_0 = a_0 + d \cdot 0$ ．

正の各自然数  $n$  について， $a_n = a_{n-1} + d$  なので， $a_{n-1} = a_0 + d(n-1)$  と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + d = a_0 + d(n-1) + d = a_0 + dn .$$

故に，数学的帰納法により，任意の自然数  $n$  について  $a_n = a_0 + dn$  ．

第 0 項から始まる数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が公比  $r$  の等比数列であるとする．正の自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1}r$  . 次のことを数学的帰納法により証明する：  
任意の自然数  $n$  について  $a_n = a_0 r^n$  .

第 0 項から始まる数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が公比  $r$  の等比数列であるとする．正の自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1}r$  ．次のことを数学的帰納法により証明する：

任意の自然数  $n$  について  $a_n = a_0 r^n$  ．

$r^0 = 1$  なので  $a_0 = a_0 r^0$  ．

第 0 項から始まる数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が公比  $r$  の等比数列であるとする．正の自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1}r$  . 次のことを数学的帰納法により証明する：

任意の自然数  $n$  について  $a_n = a_0 r^n$  .

$r^0 = 1$  なので  $a_0 = a_0 r^0$  .

正の各自然数  $n$  について,  $a_n = a_{n-1}r$  なので,  $a_{n-1} = a_0 r^{n-1}$  と仮定すると

$$a_n = a_{n-1}r = a_0 r^{n-1} \cdot r = a_0 r^n .$$

第 0 項から始まる数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が公比  $r$  の等比数列であるとする．正の自然数  $n$  について  $a_n = a_{n-1}r$  . 次のことを数学的帰納法により証明する：

任意の自然数  $n$  について  $a_n = a_0 r^n$  .

$r^0 = 1$  なので  $a_0 = a_0 r^0$  .

正の各自然数  $n$  について,  $a_n = a_{n-1}r$  なので,  $a_{n-1} = a_0 r^{n-1}$  と仮定すると

$$a_n = a_{n-1}r = a_0 r^{n-1} \cdot r = a_0 r^n .$$

故に, 数学的帰納法により, 任意の自然数  $n$  について  $a_n = a_0 r^n$  .

なお、数学的帰納法は帰納法ではなくて演繹法である.