

1.5 等比数列

数列 $\{a_n\}$ について、漸化式

$$a_n = a_{n-1} + d \quad (d \text{ は変数 } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき、数列 $\{a_n\}$ を等差数列といい、定数 d をその公差という。

数列 $\{a_n\}$ について、漸化式

$$a_n = a_{n-1} + d \quad (d \text{ は変数 } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき、数列 $\{a_n\}$ を等差数列といい、定数 d をその公差という。

数列 $\{a_n\}$ について、漸化式

$$a_n = ra_{n-1} \quad (r \text{ は変数 } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき、数列 $\{a_n\}$ を等比数列といい、定数 r をその公比という。

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする.

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 ,$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 ,$$

\vdots .

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 ,$$

\vdots .

また, 正の自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ より $a_{n-1} = \frac{a_n}{2}$ なので,

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 ,$$

\vdots .

また, 正の自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ より $a_{n-1} = \frac{a_n}{2}$ なので,

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 3 \text{ とすると } a_2 = \frac{a_3}{2} = \frac{10}{2} = 5 ,$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 ,$$

\vdots .

また, 正の自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ より $a_{n-1} = \frac{a_n}{2}$ なので,

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 3 \text{ とすると } a_2 = \frac{a_3}{2} = \frac{10}{2} = 5 ,$$

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 2 \text{ とすると } a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{5}{2} ,$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 ,$$

\vdots .

また, 正の自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ より $a_{n-1} = \frac{a_n}{2}$ なので,

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 3 \text{ とすると } a_2 = \frac{a_3}{2} = \frac{10}{2} = 5 ,$$

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 2 \text{ とすると } a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{5}{2} ,$$

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 1 \text{ とすると } a_0 = \frac{a_1}{2} = \frac{5}{4} .$$

終

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. 正の自然数 n について漸化式 $a_n = a_{n-1}r$ が成り立つので, 自然数 m に対する項 a_m から $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \dots$ を計算していくと,

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. 正の自然数 n について漸化式 $a_n = a_{n-1}r$ が成り立つので, 自然数 m に対する項 a_m から $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \dots$ を計算していくと,

$$a_{m+1} = a_m r = a_m r^1,$$

$$a_{m+2} = a_{m+1} r = a_m r \cdot r = a_m r^2,$$

$$a_{m+3} = a_{m+2} r = a_m r^2 \cdot r = a_m r^3,$$

$$a_{m+4} = a_{m+3} r = a_m r^3 \cdot r = a_m r^4,$$

$$a_{m+5} = a_{m+4} r = a_m r^4 \cdot r = a_m r^5,$$

\vdots

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. 正の自然数 n について漸化式 $a_n = a_{n-1}r$ が成り立つので, 自然数 m に対する項 a_m から $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \dots$ を計算していくと,

$$a_{m+1} = a_m r = a_m r^1,$$

$$a_{m+2} = a_{m+1} r = a_m r \cdot r = a_m r^2,$$

$$a_{m+3} = a_{m+2} r = a_m r^2 \cdot r = a_m r^3,$$

$$a_{m+4} = a_{m+3} r = a_m r^3 \cdot r = a_m r^4,$$

$$a_{m+5} = a_{m+4} r = a_m r^4 \cdot r = a_m r^5,$$

\vdots

このように, 各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m r^k$.

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m r^k$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_m & \xrightarrow{\times r} & a_{m+1} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+2} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+3} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+4} & \xrightarrow{\times r} & \cdots & \xrightarrow{\times r} & a_{m+k} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ & & a_m r & & a_m r^2 & & a_m r^3 & & a_m r^4 & & \cdots & & a_m r^k \end{array}$$

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m r^k$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_m & \xrightarrow{\times r} & a_{m+1} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+2} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+3} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+4} & \xrightarrow{\times r} & \cdots & \xrightarrow{\times r} & a_{m+k} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ & & a_m r & & a_m r^2 & & a_m r^3 & & a_m r^4 & & \cdots & & a_m r^k \end{array}$$

この等式 $a_{m+k} = a_m r^k$ において $m+k = n$ とおく ; $k = n - m$ なので,

$$a_n = a_m r^{n-m} .$$

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m r^k$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_m & \xrightarrow{\times r} & a_{m+1} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+2} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+3} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+4} & \xrightarrow{\times r} & \cdots & \xrightarrow{\times r} & a_{m+k} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ & & a_m r & & a_m r^2 & & a_m r^3 & & a_m r^4 & & \cdots & & a_m r^k \end{array}$$

この等式 $a_{m+k} = a_m r^k$ において $m+k = n$ とおく ; $k = n - m$ なので,

$$a_n = a_m r^{n-m} .$$

[定理 1.5.1] 数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

[定理 1.5.1] 数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

この定理より次のようになる.

[定理 1.5.1] 数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき、数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

この定理より次のようになる．第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が公比が r である等比数列であるとき、

$$\text{正の自然数 } n \text{ について } a_n = a_1 r^{n-1} .$$

[定理 1.5.1] 数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき、数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

この定理より次のようになる. 第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が公比が r である等比数列であるとき,

$$\text{正の自然数 } n \text{ について } a_n = a_1 r^{n-1} .$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公比が r である等比数列であるとき,

$$\text{各自然数 } n \text{ について } a_n = a_0 r^n .$$

[定理 1.5.1] 数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき、数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

この定理より次のようになる. 第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が公比が r である等比数列であるとき,

$$\text{正の自然数 } n \text{ について } a_n = a_1 r^{n-1} .$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公比が r である等比数列であるとき,

$$\text{各自然数 } n \text{ について } a_n = a_0 r^n .$$

このように、等比数列の一般項は公比が r の冪の定数倍である.

例 自然数でない実数 x に対して, 例えば $\left(-\frac{2}{3}\right)^x$ のような, 底が負の数で指数が x である冪は定義されていない (指数関数の底は正の実数に限られる).

例 自然数でない実数 x に対して，例えば $\left(-\frac{2}{3}\right)^x$ のような，底が負の数で指数が x である冪は定義されていない（指数関数の底は正の実数に限られる）．しかし，数列 $\{a_n\}$ の独立変数 n の値は自然数に限られるので， $\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ のような負の数を底とする冪の値がある：

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3}, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}, \quad \dots$$

例 自然数でない実数 x に対して、例えば $\left(-\frac{2}{3}\right)^x$ のような、底が負の数で指数が x である冪は定義されていない（指数関数の底は正の実数に限られる）。しかし、数列 $\{a_n\}$ の独立変数 n の値は自然数に限られるので、 $\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ のような負の数を底とする冪の値がある：

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3}, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}, \quad \dots$$

従って、例えば公比が $-\frac{2}{3}$ である等比数列 $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ ができる。 終

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が 2 である等比数列であり, $a_5 = 28$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が 2 である等比数列であり, $a_5 = 28$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す. 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が 2 である等比数列なので, 各自然数 n について,

$$a_n = a_5 2^{n-5}$$

$$a_n = a_m r^{n-m}$$

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が 2 である等比数列であり, $a_5 = 28$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す. 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が 2 である等比数列なので, 各自然数 n について,

$$a_n = a_5 2^{n-5} = 28 \cdot 2^{n-5} = 7 \cdot 2^2 \cdot 2^{n-5} = 7 \cdot 2^{n-3} .$$

終

問1.5.1 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が $\frac{1}{3}$ である等比数列であり, $a_2 = 45$ とする.
各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が $\frac{1}{3}$ である等比数列なので,

$$a_n =$$

問1.5.1 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が $\frac{1}{3}$ である等比数列であり, $a_2 = 45$ とする.
各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が $\frac{1}{3}$ である等比数列なので,

$$a_n = a_2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 45 \cdot \frac{1}{3^{n-2}} = \frac{5 \cdot 3^2}{3^{n-2}} = \frac{5}{3^{n-4}} .$$

終

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_2 = 7$, $a_6 = 63$ とする.
各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_2 = 7$, $a_6 = 63$ とする.
各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す. まず公比を求める.

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_2 = 7$, $a_6 = 63$ とする.
各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す. まず公比を求める. 等比数
列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. $a_6 = a_2 r^{6-2}$ なので, $63 = 7r^4$, $r^4 = 9$,
$$a_n = a_m r^{n-m}$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_2 = 7$, $a_6 = 63$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す. まず公比を求める. 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. $a_6 = a_2 r^{6-2}$ なので, $63 = 7r^4$, $r^4 = 9$, $r > 0$ なので

$$r = 9^{\frac{1}{4}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} .$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり、 $a_2 = 7$ 、 $a_6 = 63$ とする。各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す。まず公比を求める。等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく。 $a_6 = a_2 r^{6-2}$ なので、 $63 = 7r^4$ 、 $r^4 = 9$ 、 $r > 0$ なので

$$r = 9^{\frac{1}{4}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} .$$

よって、

$$a_n = a_2 r^{n-2} = 7 \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{n-2} = 7 \cdot 3^{\frac{n}{2}-1} .$$

終

問1.5.2 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_3 = 4$, $a_{12} = 500$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. $a_{12} = a_3 r^{12-3} = a_3 r^9$ なので, $4r^9 = 500$, $r^9 = \frac{500}{4} = 125$, $r > 0$ なので $r = 125^{\frac{1}{9}} = (5^3)^{\frac{1}{9}} = 5^{\frac{1}{3}}$. よって,

$$a_n =$$

問1.5.2 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_3 = 4$, $a_{12} = 500$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. $a_{12} = a_3 r^{12-3} = a_3 r^9$ なので, $4r^9 = 500$, $r^9 = \frac{500}{4} = 125$, $r > 0$ なので $r = 125^{\frac{1}{9}} = (5^3)^{\frac{1}{9}} = 5^{\frac{1}{3}}$. よって,

$$a_n = a_3 r^{n-3} = 4 \cdot \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{n-3} = 4 \cdot 5^{\frac{n}{3}-1}. \quad \boxed{\text{終}}$$

等比数列の項の総和の計算法を説明する.

例 公比が 5 である等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^n (2 \cdot 5^k) = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n$$

を計算する.

例 公比が 5 である等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^n (2 \cdot 5^k) = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n$$

を計算する．この値を S とおく：

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n .$$

例 公比が 5 である等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^n (2 \cdot 5^k) = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n$$

を計算する．この値を S とおく：

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n .$$

この等式の両辺に公比 5 を掛ける：

$$5S = (2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n) \cdot 5$$

例 公比が 5 である等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^n (2 \cdot 5^k) = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n$$

を計算する．この値を S とおく：

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n .$$

この等式の両辺に公比 5 を掛ける：

$$\begin{aligned} 5S &= (2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n) \cdot 5 \\ &= 2 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 50 \cdot 5 + 250 \cdot 5 + 1250 \cdot 5 + \cdots \\ &\quad + 2 \cdot 5^{n-2} \cdot 5 + 2 \cdot 5^{n-1} \cdot 5 + 2 \cdot 5^n \cdot 5 \end{aligned}$$

例 公比が 5 である等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^n (2 \cdot 5^k) = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n$$

を計算する．この値を S とおく：

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n .$$

この等式の両辺に公比 5 を掛ける：

$$\begin{aligned} 5S &= (2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n) \cdot 5 \\ &= 2 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 50 \cdot 5 + 250 \cdot 5 + 1250 \cdot 5 + \cdots \\ &\quad + 2 \cdot 5^{n-2} \cdot 5 + 2 \cdot 5^{n-1} \cdot 5 + 2 \cdot 5^n \cdot 5 \\ &= 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^{n+1} . \end{aligned}$$

$$5S = 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^{n+1} ,$$

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n .$$

例 2 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{5 \cdot 3^k\}_{k \geq 2}$ の項の総和 $\sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$ を計算する.

例 2 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{5 \cdot 3^k\}_{k \geq 2}$ の項の総和 $\sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$

を計算する. $S = \sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$ とおく.

$$S = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n .$$

例 2 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{5 \cdot 3^k\}_{k \geq 2}$ の項の総和 $\sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$

を計算する. $S = \sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$ とおく.

$$S = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n .$$

等比数列 $\{5 \cdot 3^k\}_{k \geq 2}$ の公比は である.

例 2 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{5 \cdot 3^k\}_{k \geq 2}$ の項の総和 $\sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$

を計算する. $S = \sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$ とおく.

$$S = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n .$$

等比数列 $\{5 \cdot 3^k\}_{k \geq 2}$ の公比は 3 である. この公比 3 を両辺に掛ける :

$$3S = 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + 5 \cdot 3^7 + \cdots + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} .$$

例 2以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{5 \cdot 3^k\}_{k \geq 2}$ の項の総和 $\sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$

を計算する. $S = \sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$ とおく.

$$S = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n .$$

等比数列 $\{5 \cdot 3^k\}_{k \geq 2}$ の公比は 3 である. この公比 3 を両辺に掛ける:

$$3S = 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + 5 \cdot 3^7 + \cdots + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} .$$

$3S$ から S を引く:

$$\begin{array}{r} 3S = + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} \\ -) \quad S = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n \\ \hline 2S = -5 \cdot 3^2 \phantom{+ 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1}} + 5 \cdot 3^{n+1} \end{array}$$

$2S = -5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^{n+1} = 5 \cdot 3^{n+1} - 45$ なので,

例 2以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{5 \cdot 3^k\}_{k \geq 2}$ の項の総和 $\sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$

を計算する. $S = \sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$ とおく.

$$S = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n .$$

等比数列 $\{5 \cdot 3^k\}_{k \geq 2}$ の公比は 3 である. この公比 3 を両辺に掛ける:

$$3S = 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + 5 \cdot 3^7 + \cdots + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} .$$

$3S$ から S を引く:

$$\begin{array}{r} 3S = + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} \\ -) \quad S = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n \\ \hline 2S = -5 \cdot 3^2 \phantom{+ 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n} + 5 \cdot 3^{n+1} \end{array}$$

$$2S = -5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^{n+1} = 5 \cdot 3^{n+1} - 45 \quad \text{なので,} \quad S = \frac{5 \cdot 3^{n+1} - 45}{2} .$$

例 2以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{5 \cdot 3^k\}_{k \geq 2}$ の項の総和 $\sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$

を計算する. $S = \sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$ とおく.

$$S = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n .$$

等比数列 $\{5 \cdot 3^k\}_{k \geq 2}$ の公比は 3 である. この公比 3 を両辺に掛ける:

$$3S = 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + 5 \cdot 3^7 + \cdots + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} .$$

$3S$ から S を引く:

$$\begin{array}{r} 3S = + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} \\ -) \quad S = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n \\ \hline 2S = -5 \cdot 3^2 \phantom{+ 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1}} + 5 \cdot 3^{n+1} \end{array}$$

$2S = -5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^{n+1} = 5 \cdot 3^{n+1} - 45$ なので, $S = \frac{5 \cdot 3^{n+1} - 45}{2}$. 故に

$$\sum_{k=0}^n (5 \cdot 3^k) = \frac{5 \cdot 3^{n+1} - 45}{2} .$$

終

問1.5.3 3以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{8 \cdot 5^k\}_{k \geq 3}$ の項の総和

$\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ を計算せよ.

$S = \sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ とおく. 等比数列 $\{8 \cdot 5^k\}_{k \geq 3}$ の公比は である.

$$S = 8 \cdot 5^3 + 8 \cdot 5^4 + 8 \cdot 5^5 + 8 \cdot 5^6 + \cdots + 8 \cdot 5^{n-1} + 8 \cdot 5^n,$$

$$S = 8 \cdot \quad + 8 \cdot \quad + 8 \cdot \quad + 8 \cdot \quad + \cdots + 8 \cdot \quad + 8 \cdot \quad .$$

から を引くと $4S =$ なので,

$$S =$$

故に $\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k) =$.

問1.5.3 3以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{8 \cdot 5^k\}_{k \geq 3}$ の項の総和

$\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ を計算せよ.

$S = \sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ とおく. 等比数列 $\{8 \cdot 5^k\}_{k \geq 3}$ の公比は 5 である.

$$S = 8 \cdot 5^3 + 8 \cdot 5^4 + 8 \cdot 5^5 + 8 \cdot 5^6 + \cdots + 8 \cdot 5^{n-1} + 8 \cdot 5^n,$$

$$5S = 8 \cdot \quad + 8 \cdot \quad + 8 \cdot \quad + 8 \cdot \quad + \cdots + 8 \cdot \quad + 8 \cdot \quad .$$

から \quad を引くと $4S = \quad$ なので,

$$S =$$

故に $\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k) =$

問1.5.3 3以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{8 \cdot 5^k\}_{k \geq 3}$ の項の総和

$\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ を計算せよ.

$S = \sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ とおく. 等比数列 $\{8 \cdot 5^k\}_{k \geq 3}$ の公比は 5 である.

$$S = 8 \cdot 5^3 + 8 \cdot 5^4 + 8 \cdot 5^5 + 8 \cdot 5^6 + \cdots + 8 \cdot 5^{n-1} + 8 \cdot 5^n,$$

$$5S = 8 \cdot 5^4 + 8 \cdot 5^5 + 8 \cdot 5^6 + 8 \cdot 5^7 + \cdots + 8 \cdot 5^n + 8 \cdot 5^{n+1}.$$

$5S$ から S を引くと $4S =$ なので,

$$S =$$

故に $\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k) =$

問1.5.3 3以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{8 \cdot 5^k\}_{k \geq 3}$ の項の総和

$\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ を計算せよ.

$S = \sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ とおく. 等比数列 $\{8 \cdot 5^k\}_{k \geq 3}$ の公比は 5 である.

$$S = 8 \cdot 5^3 + 8 \cdot 5^4 + 8 \cdot 5^5 + 8 \cdot 5^6 + \cdots + 8 \cdot 5^{n-1} + 8 \cdot 5^n ,$$

$$5S = 8 \cdot 5^4 + 8 \cdot 5^5 + 8 \cdot 5^6 + 8 \cdot 5^7 + \cdots + 8 \cdot 5^n + 8 \cdot 5^{n+1} .$$

$5S$ から S を引くと $4S = 8 \cdot 5^{n+1} - 8 \cdot 5^3$ なので,

$$S = 2 \cdot 5^{n+1} - 2 \cdot 5^3 = 2 \cdot 5^{n+1} - 250 .$$

故に $\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k) = 2 \cdot 5^{n+1} - 250$.

終

例 各自然数 n に対して等比数列 $\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}_{k \geq 0}$ の項の総和 $\sum_{k=0}^n \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ を計算する.

例 各自然数 n に対して等比数列 $\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}_{k \geq 0}$ の項の総和 $\sum_{k=0}^n \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ を計

算する. $S = \sum_{k=0}^n \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ とおく:

$$S = 3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3\left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^3 + \cdots + 3\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1} + 3\left(\frac{5}{7}\right)^n .$$

例 各自然数 n に対して等比数列 $\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}_{k \geq 0}$ の項の総和 $\sum_{k=0}^n \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ を計

算する. $S = \sum_{k=0}^n \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ とおく:

$$S = 3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3\left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^3 + \cdots + 3\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1} + 3\left(\frac{5}{7}\right)^n .$$

この等式の両辺に等比数列 $\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}_{k \geq 0}$ の公比 $\frac{5}{7}$ を掛ける:

$$\frac{5}{7}S = 3 \cdot \frac{5}{7} + 3\left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^3 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3\left(\frac{5}{7}\right)^n + 3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} .$$

$$S = 3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^3 + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^n$$

$$-) \quad \frac{5}{7}S = \quad 3 \cdot \frac{5}{7} + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^3 + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^n + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}$$

$$\frac{2}{7}S = 3 \qquad \qquad \qquad - 3 \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}$$

つまり $\frac{2}{7}S = 3 - 3 \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}$.

$$S = 3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^3 + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^n$$

$$-) \quad \frac{5}{7}S = 3 \cdot \frac{5}{7} + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^3 + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^n + 3 \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}$$

$$\frac{2}{7}S = 3 - 3 \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}$$

つまり $\frac{2}{7}S = 3 - 3 \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}$. 両辺に $\frac{7}{2}$ を掛けて

$$S = 3 \cdot \frac{7}{2} - 3 \cdot \frac{7}{2} \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} = \frac{21}{2} - 3 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{7} \left(\frac{5}{7}\right)^n = \frac{21}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{5}{7}\right)^n .$$

問1.5.4 正の自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算せよ.

$$S = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} \quad \text{とおく.}$$

$$S = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-2} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n,$$

$$\frac{3}{5}S =$$

S から $\frac{3}{5}S$ を引くと $\frac{2}{5}S =$ なので,

$$S =$$

つまり $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} =$.

問1.5.4 正の自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算せよ.

$$S = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} \quad \text{とおく.}$$

$$S = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-2} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n,$$

$$\frac{3}{5}S = 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^5 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1}.$$

S から $\frac{3}{5}S$ を引くと $\frac{2}{5}S =$ なので,

$$S =$$

つまり $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} =$.

問1.5.4 正の自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算せよ.

$$S = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} \quad \text{とおく.}$$

$$S = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-2} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n,$$

$$\frac{3}{5}S = 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^5 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1}.$$

S から $\frac{3}{5}S$ を引くと $\frac{2}{5}S = 4 \cdot \frac{3}{5} - 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1}$ なので,

$$S = 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} - 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} \frac{5}{2} = 6 - 10 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} = 6 - 10 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^n = 6 - 6 \left(\frac{3}{5} \right)^n.$$

つまり $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} = 6 - 6 \left(\frac{3}{5} \right)^n$.

終

定数 r について $r \neq 1$ とする. 最初の項が a で公比が r である等比数列の初め n 個の項の総和を S_n とおく:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} .$$

定数 r について $r \neq 1$ とする. 最初の項が a で公比が r である等比数列の初め n 個の項の総和を S_n とおく:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} .$$

この等式の両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n .$$

定数 r について $r \neq 1$ とする. 最初の項が a で公比が r である等比数列の初め n 個の項の総和を S_n とおく:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} .$$

この等式の両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n .$$

S_n から rS_n を引くと,

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ &\quad - (ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n) \\ &= a - ar^n , \end{aligned}$$

定数 r について $r \neq 1$ とする. 最初の項が a で公比が r である等比数列の初め n 個の項の総和を S_n とおく:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} .$$

この等式の両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n .$$

S_n から rS_n を引くと,

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ &\quad - (ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n) \\ &= a - ar^n , \end{aligned}$$

よって $(1-r)S_n = a(1-r^n)$ なので, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$.

$r = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} &= \underbrace{a + a + a + a + a + \cdots + a + a}_{n \text{ 個の } a \text{ の和}} \\ &= an . \end{aligned}$$

$r = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} &= \underbrace{a + a + a + a + a + \cdots + a + a}_{n \text{ 個の } a \text{ の和}} \\ &= an . \end{aligned}$$

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して, 最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は, $r \neq 1$ のとき

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} ,$$

$r = 1$ のとき

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = an .$$

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して、最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は、 $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

$r = 1$ のとき

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = an .$$

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して、最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は、 $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

$r = 1$ のとき

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = an .$$

[例] 正の自然数 n に対して、初項が 5 で公比が 3 である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和を計算する.

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して、最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は、 $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

$r = 1$ のとき

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = an .$$

[例] 正の自然数 n に対して、初項が 5 で公比が 3 である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和を計算する.

$$5 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} = \frac{5(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{5}{2}(3^n - 1) .$$

終

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して，最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は， $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

$r = 1$ のとき

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = an .$$

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して、最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は、 $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

例 正の自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する.

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して、最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は、 $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

最初の項が a で公比が r で項数が n

[例] 正の自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する.

$$\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して、最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は、 $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

最初の項が a で公比が r で項数が n

[例] 正の自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} &= 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \\ &= \frac{12}{5} + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^1 + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^2 + \cdots + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-2} + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して、最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は、 $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

最初の項が a で公比が r で項数が n

[例] 正の自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} &= 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \\ &= \underbrace{\frac{12}{5} + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^1 + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^2 + \cdots + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-2} + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1}}_{\text{最初の項が } \frac{12}{5} \text{ で公比が } \frac{3}{5} \text{ で項数が } n} \end{aligned}$$

最初の項が $\frac{12}{5}$ で公比が $\frac{3}{5}$ で項数が n

$$= \frac{\frac{12}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\}}{1 - \frac{3}{5}}$$

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して、最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は、 $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

最初の項が a で公比が r で項数が n

[例] 正の自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} &= 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \\ &= \frac{12}{5} + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^1 + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^2 + \cdots + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-2} + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \\ &= \frac{\frac{12}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\}}{1 - \frac{3}{5}} \\ &= 6 \left\{ 1 - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\}. \end{aligned}$$

終

問1.5.5 正の自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 6 \left(\frac{5}{3} \right)^k \right\}$ を計算せよ.

問1.5.5 正の自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 6 \left(\frac{5}{3} \right)^k \right\}$ を計算せよ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ 6 \left(\frac{5}{3} \right)^k \right\} &= 6 \cdot \frac{5}{3} + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^2 + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^3 + \cdots + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^{n-1} + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^n \\ &= 10 + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^1 + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^2 + \cdots + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^{n-2} + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

問1.5.5 正の自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 6 \left(\frac{5}{3} \right)^k \right\}$ を計算せよ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ 6 \left(\frac{5}{3} \right)^k \right\} &= 6 \cdot \frac{5}{3} + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^2 + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^3 + \cdots + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^{n-1} + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^n \\ &= 10 + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^1 + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^2 + \cdots + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^{n-2} + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^{n-1} \\ &= \frac{10 \left\{ \left(\frac{5}{3} \right)^n - 1 \right\}}{\frac{5}{3} - 1} \\ &= 15 \left\{ \left(\frac{5}{3} \right)^n - 1 \right\} . \end{aligned}$$

終

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して、最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は、 $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

最初の項が a で公比が r で項数が n

$r = 1$ のとき

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = an .$$

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して、最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は、 $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

[例] 正の自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\frac{2}{5} + 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n$ を計算する.

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して、最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は、 $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

[例] 正の自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\frac{2}{5} + 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n$ を計算する.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5} + 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n \\ &= 2 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 + \cdots + 2 \cdot 5^n \end{aligned}$$

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して、最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は、 $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

[例] 正の自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\frac{2}{5} + 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n$ を計算する.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5} + 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n \\ &= \underbrace{2 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 + \cdots + 2 \cdot 5^n}_{\text{最初の項が } \frac{2}{5} \text{ で公比が } 5 \text{ で項数が } n+2} = \frac{\frac{2}{5}(5^{n+2} - 1)}{5 - 1} \end{aligned}$$

[定理 1.5.2] 正の自然数 n に対して、最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は、 $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

[例] 正の自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\frac{2}{5} + 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n$ を計算する.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5} + 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n \\ &= 2 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 + \cdots + 2 \cdot 5^n = \frac{2}{5}(5^{n+2} - 1) \\ &= \frac{5^{n+2} - 1}{10} . \end{aligned}$$

終

問1.5.6 正の自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\frac{4}{9} + \frac{4}{3} + 4 + 12 + 36 + 108 + \cdots + 4 \cdot 3^n$ を計算せよ.

問1.5.6 正の自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\frac{4}{9} + \frac{4}{3} + 4 + 12 + 36 + 108 + \cdots + 4 \cdot 3^n$ を計算せよ.

$$\begin{aligned} & \frac{4}{9} + \frac{4}{3} + 4 + 12 + 36 + 108 + \cdots + 4 \cdot 3^n \\ &= 4 \cdot 3^{-2} + 4 \cdot 3^{-1} + 4 \cdot 3^0 + 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \cdots + 4 \cdot 3^n = \frac{\frac{4}{9}(3^{n+3} - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{2}{9}(3^{n+3} - 1) . \end{aligned}$$

終