

1.2 数列の項の総和

数列 f の定義域に属す自然数 m, n について $m \leq n$ とする. f について,
 m における項 $f(m)$ から n における項 $f(n)$ までの総和

$$f(m) + f(m+1) + f(m+2) + f(m+3) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

を $\sum_{k=m}^n f(k)$ と書き表す:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + f(m+3) + \cdots + f(n-1) + f(n) .$$

数列 f の定義域に属す自然数 m, n について $m \leq n$ とする. f について,
 m における項 $f(m)$ から n における項 $f(n)$ までの総和

$$f(m) + f(m+1) + f(m+2) + f(m+3) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

を $\sum_{k=m}^n f(k)$ と書き表す:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + f(m+3) + \cdots + f(n-1) + f(n) .$$

例

$$\sum_{k=3}^9 \frac{k}{2} = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + \frac{7}{2} + \frac{8}{2} + \frac{9}{2} = \frac{42}{2} = 21 .$$

数列 f の定義域に属す自然数 m, n について $m \leq n$ とする. f について,
 m における項 $f(m)$ から n における項 $f(n)$ までの総和

$$f(m) + f(m+1) + f(m+2) + f(m+3) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

を $\sum_{k=m}^n f(k)$ と書き表す:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + f(m+3) + \cdots + f(n-1) + f(n) .$$

例

$$\sum_{k=3}^9 \frac{k}{2} = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + \frac{7}{2} + \frac{8}{2} + \frac{9}{2} = \frac{42}{2} = 21 .$$

$$\sum_{k=2}^6 k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 90 .$$

終

式 $\sum_{k=m}^n f(k)$ に現われる変数 k を他の変数に置き換えても値は同じである.

式 $\sum_{k=m}^n f(k)$ に現われる変数 k を他の変数に置き換えても値は同じである。

例

$$\sum_{k=2}^5 \frac{6}{k} = \frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} + \frac{6}{5} = 3 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{6}{5} = \frac{77}{10} .$$

$$\sum_{i=2}^5 \frac{6}{i} = \frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} + \frac{6}{5} = 3 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{6}{5} = \frac{77}{10} .$$

$$\sum_{j=2}^5 \frac{6}{j} = \frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} + \frac{6}{5} = 3 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{6}{5} = \frac{77}{10} .$$

終

問1.2.1 総和 $\sum_{i=0}^4 \frac{i^3}{10}$ を計算せよ.

$$\sum_{i=0}^4 \frac{i^3}{10} = \quad + \quad + \quad + \quad + \quad = \quad = \quad .$$

問1.2.1 総和 $\sum_{i=0}^4 \frac{i^3}{10}$ を計算せよ.

$$\sum_{i=0}^4 \frac{i^3}{10} = \frac{0^3}{10} + \frac{1^3}{10} + \frac{2^3}{10} + \frac{3^3}{10} + \frac{4^3}{10} = \frac{0 + 1 + 8 + 27 + 64}{10} = 10 .$$

終

問1.2.2 総和 $\sum_{j=2}^5 \frac{12}{j+1}$ を計算せよ.

$$\sum_{j=2}^5 \frac{12}{j+1} = \quad + \quad + \quad + \quad = \quad + \quad + \quad + \quad = \quad .$$

問1.2.2 総和 $\sum_{j=2}^5 \frac{12}{j+1}$ を計算せよ.

$$\sum_{j=2}^5 \frac{12}{j+1} = \frac{12}{3} + \frac{12}{4} + \frac{12}{5} + \frac{12}{6} = 4 + 3 + \frac{12}{5} + 2 = \frac{57}{5} .$$

終

4 と 7 とが数列 f の定義域に属すとする.

4 と 7 とが数列 f の定義域に属すとする. 定数 c に対して, 総和記号 Σ の定義より,

$$\sum_{k=4}^7 \{cf(k)\} = cf(4) + cf(5) + cf(6) + cf(7)$$

4 と 7 とが数列 f の定義域に属すとする. 定数 c に対して, 総和記号 Σ の定義より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^7 \{cf(k)\} &= cf(4) + cf(5) + cf(6) + cf(7) \\ &= c\{f(4) + f(5) + f(6) + f(7)\}\end{aligned}$$

4 と 7 とが数列 f の定義域に属すとする. 定数 c に対して, 総和記号 Σ の定義より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^7 \{cf(k)\} &= cf(4) + cf(5) + cf(6) + cf(7) \\ &= c\{f(4) + f(5) + f(6) + f(7)\} \\ &= c \sum_{k=4}^7 f(k) , \quad f(4) + f(5) + f(6) + f(7) = \sum_{k=4}^7 f(k)\end{aligned}$$

4 と 7 とが数列 f の定義域に属すとする. 定数 c に対して, 総和記号 Σ の定義より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^7 \{cf(k)\} &= cf(4) + cf(5) + cf(6) + cf(7) \\ &= c\{f(4) + f(5) + f(6) + f(7)\} \\ &= c \sum_{k=4}^7 f(k) ,\end{aligned}$$

つまり

$$\sum_{k=4}^7 \{cf(k)\} = c \sum_{k=4}^7 f(k) .$$

4 と 7 とが数列 f の定義域に属すとする. 定数 c に対して, 総和記号 Σ の定義より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^7 \{cf(k)\} &= cf(4) + cf(5) + cf(6) + cf(7) \\ &= c\{f(4) + f(5) + f(6) + f(7)\} \\ &= c \sum_{k=4}^7 f(k) ,\end{aligned}$$

つまり

$$\sum_{k=4}^7 \{cf(k)\} = c \sum_{k=4}^7 f(k) .$$

このようにして次の定理が成り立つ.

[定理 1.2.1] $m \leq n$ である自然数 m, n が数列 f の定義域に属すとき, 定数 c に対して,

$$\sum_{k=m}^n \{cf(k)\} = c \sum_{k=m}^n f(k) .$$

5 と 7 とが数列 f と g との両方の定義域に属すとする. 総和記号 Σ の定義より,

$$\sum_{k=5}^7 \{f(k) + g(k)\} = f(5) + g(5) + f(6) + g(6) + f(7) + g(7)$$

5 と 7 とが数列 f と g との両方の定義域に属すとする. 総和記号 Σ の定義より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^7 \{f(k) + g(k)\} &= f(5) + g(5) + f(6) + g(6) + f(7) + g(7) \\ &= f(5) + f(6) + f(7) + g(5) + g(6) + g(7)\end{aligned}$$

5 と 7 とが数列 f と g との両方の定義域に属すとする. 総和記号 Σ の定義より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^7 \{f(k) + g(k)\} &= f(5) + g(5) + f(6) + g(6) + f(7) + g(7) \\ &= f(5) + f(6) + f(7) + g(5) + g(6) + g(7) \\ &= \sum_{k=5}^7 f(k) + \sum_{k=5}^7 g(k) , \quad \begin{aligned} f(5) + f(6) + f(7) &= \sum_{k=5}^7 f(k) \\ g(5) + g(6) + g(7) &= \sum_{k=5}^7 g(k) \end{aligned}\end{aligned}$$

5 と 7 とが数列 f と g との両方の定義域に属すとする. 総和記号 Σ の定義より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^7 \{f(k) + g(k)\} &= f(5) + g(5) + f(6) + g(6) + f(7) + g(7) \\ &= f(5) + f(6) + f(7) + g(5) + g(6) + g(7) \\ &= \sum_{k=5}^7 f(k) + \sum_{k=5}^7 g(k) ,\end{aligned}$$

つまり

$$\sum_{k=5}^7 \{f(k) + g(k)\} = \sum_{k=5}^7 f(k) + \sum_{k=5}^7 g(k) .$$

5 と 7 とが数列 f と g との両方の定義域に属すとす。総和記号 Σ の定義より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^7 \{f(k) + g(k)\} &= f(5) + g(5) + f(6) + g(6) + f(7) + g(7) \\ &= f(5) + f(6) + f(7) + g(5) + g(6) + g(7) \\ &= \sum_{k=5}^7 f(k) + \sum_{k=5}^7 g(k) ,\end{aligned}$$

つまり

$$\sum_{k=5}^7 \{f(k) + g(k)\} = \sum_{k=5}^7 f(k) + \sum_{k=5}^7 g(k) .$$

次の定理が成り立つ。

[定理 1.2.2] $m \leq n$ である自然数 m, n が数列 f と g との定義域に属するとき,

$$\sum_{k=m}^n \{f(k) \pm g(k)\} = \sum_{k=m}^n f(k) \pm \sum_{k=m}^n g(k) \quad (\text{複号同順}) .$$

4 と 8 とが定義域に属す数列 f に対して $\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\}$ を計算する.

4 と 8 とが定義域に属す数列 f に対して $\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\}$ を計算する．総和記号 Σ の定義より

$$\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\} = f(4) - f(5) + f(5) - f(6) + f(6) - f(7) + f(7) - f(8)$$

4 と 8 とが定義域に属す数列 f に対して $\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\}$ を計算する．総和記号 Σ の定義より

$$\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\} = f(4) - \cancel{f(5)} + \cancel{f(5)} - f(6) + f(6) - f(7) + f(7) - f(8)$$

4 と 8 とが定義域に属す数列 f に対して $\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\}$ を計算する．総和記号 Σ の定義より

$$\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\} = f(4) - \cancel{f(5)} + \cancel{f(5)} - \cancel{f(6)} + \cancel{f(6)} - f(7) + f(7) - f(8)$$

4 と 8 とが定義域に属す数列 f に対して $\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\}$ を計算する．総和記号 Σ の定義より

$$\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\} = f(4) - \cancel{f(5)} + \cancel{f(5)} - \cancel{f(6)} + \cancel{f(6)} - \cancel{f(7)} + \cancel{f(7)} - f(8)$$

4 と 8 とが定義域に属す数列 f に対して $\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\}$ を計算する．総和記号 Σ の定義より

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\} &= f(4) - \cancel{f(5)} + \cancel{f(5)} - \cancel{f(6)} + \cancel{f(6)} - \cancel{f(7)} + \cancel{f(7)} - f(8) \\ &= f(4) - f(8) .\end{aligned}$$

4 と 8 とが定義域に属す数列 f に対して $\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\}$ を計算する．総和記号 Σ の定義より

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^7 \{f(k) - f(k+1)\} &= f(4) - \cancel{f(5)} + \cancel{f(5)} - \cancel{f(6)} + \cancel{f(6)} - \cancel{f(7)} + \cancel{f(7)} - f(8) \\ &= f(4) - f(8) .\end{aligned}$$

このような計算技法をしばしば用いる．

例 総和 $\sum_{i=3}^{30} \left(\frac{7}{i} - \frac{7}{i+1} \right)$ を計算する.

例 総和 $\sum_{i=3}^{30} \left(\frac{7}{i} - \frac{7}{i+1} \right)$ を計算する.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=3}^{30} \left(\frac{7}{i} - \frac{7}{i+1} \right) \\ &= \frac{7}{3} - \frac{7}{4} + \frac{7}{4} - \frac{7}{5} + \frac{7}{5} - \frac{7}{6} + \frac{7}{6} - \frac{7}{7} + \cdots + \frac{7}{28} - \frac{7}{29} + \frac{7}{29} - \frac{7}{30} + \frac{7}{30} - \frac{7}{31} . \end{aligned}$$

この式では次のように項が相殺されて消える.

$$\begin{array}{r}
\frac{7}{3} - \frac{7}{4} \\
+ \frac{7}{4} - \frac{7}{5} \\
+ \frac{7}{5} - \frac{7}{6} \\
+ \frac{7}{6} - \frac{7}{7} \\
\vdots \\
+ \frac{7}{28} - \frac{7}{29} \\
+ \frac{7}{29} - \frac{7}{30} \\
+ \frac{7}{30} - \frac{7}{31} \\
\hline
\frac{7}{3} \qquad \qquad \qquad - \frac{7}{31}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\frac{7}{3} - \frac{7}{4} \\
+ \frac{7}{4} - \frac{7}{5} \\
+ \frac{7}{5} - \frac{7}{6} \\
+ \frac{7}{6} - \frac{7}{7} \\
\vdots \\
+ \frac{7}{28} - \frac{7}{29} \\
+ \frac{7}{29} - \frac{7}{30} \\
+ \frac{7}{30} - \frac{7}{31} \\
\hline
\frac{7}{3} \qquad \qquad \qquad - \frac{7}{31}
\end{array}$$

故に

$$\sum_{i=3}^{30} \left(\frac{7}{i} - \frac{7}{i+1} \right) = \frac{7}{3} - \frac{7}{31} = \frac{217 - 21}{93} = \frac{196}{93} .$$

終

問1.2.3 総和 $\sum_{i=7}^{48} \left(\frac{24}{i-1} - \frac{24}{i} \right)$ を計算せよ.

$$\sum_{i=7}^{48} \left(\frac{24}{i-1} - \frac{24}{i} \right) = \quad + \quad + \quad + \cdots + \quad +$$

問1.2.3 総和 $\sum_{i=7}^{48} \left(\frac{24}{i-1} - \frac{24}{i} \right)$ を計算せよ.

$$\sum_{i=7}^{48} \left(\frac{24}{i-1} - \frac{24}{i} \right) = \frac{24}{6} - \frac{24}{7} + \frac{24}{7} - \frac{24}{8} + \frac{24}{8} - \frac{24}{9} + \cdots + \frac{24}{46} - \frac{24}{47} + \frac{24}{47} - \frac{24}{48}$$

問1.2.3 総和 $\sum_{i=7}^{48} \left(\frac{24}{i-1} - \frac{24}{i} \right)$ を計算せよ.

$$\begin{aligned} \sum_{i=7}^{48} \left(\frac{24}{i-1} - \frac{24}{i} \right) &= \frac{24}{6} - \frac{24}{7} + \frac{24}{7} - \frac{24}{8} + \frac{24}{8} - \frac{24}{9} + \cdots + \frac{24}{46} - \frac{24}{47} + \frac{24}{47} - \frac{24}{48} \\ &= \frac{24}{6} - \frac{24}{48} = 4 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

終

例 総和 $\sum_{j=4}^{30} (\sqrt{3j+1} - \sqrt{3j-2})$ を計算する.

例 総和 $\sum_{j=4}^{30} (\sqrt{3j+1} - \sqrt{3j-2})$ を計算する.

$$\sum_{j=4}^{30} (\sqrt{3j+1} - \sqrt{3j-2})$$

$$= \sqrt{13} - \sqrt{10} + \sqrt{16} - \sqrt{13} + \sqrt{19} - \sqrt{16} + \cdots + \sqrt{88} - \sqrt{85} + \sqrt{91} - \sqrt{88} .$$

この式では次のように項が相殺されて消える.

$$\begin{array}{r}
\sqrt{13} - \sqrt{10} \\
+ \sqrt{16} - \sqrt{13} \\
+ \sqrt{19} - \sqrt{16} \\
+ \sqrt{21} - \sqrt{19} \\
\vdots \\
+ \sqrt{88} - \sqrt{85} \\
+ \sqrt{91} - \sqrt{88} \\
\hline
\sqrt{91} \qquad \qquad \qquad -\sqrt{10}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\sqrt{13} - \sqrt{10} \\
+ \sqrt{16} - \sqrt{13} \\
+ \sqrt{19} - \sqrt{16} \\
+ \sqrt{21} - \sqrt{19} \\
\vdots \\
+ \sqrt{88} - \sqrt{85} \\
+ \sqrt{91} - \sqrt{88} \\
\hline
\sqrt{91} \qquad \qquad \qquad -\sqrt{10}
\end{array}$$

故に

$$\sum_{j=4}^{30} (\sqrt{3j+1} - \sqrt{3j-2}) = \sqrt{91} - \sqrt{10} .$$

終

問1.2.4 総和 $\sum_{j=2}^{28} (\sqrt{5j+4} - \sqrt{5j-1})$ を計算せよ.

$$\sum_{j=2}^{28} (\sqrt{5j+4} - \sqrt{5j-1})$$
$$= \quad \quad \quad + \quad \quad \quad + \quad \quad \quad + \quad \quad \quad + \dots$$
$$\quad \quad \quad + \quad \quad \quad + \quad \quad \quad +$$

問1.2.4 総和 $\sum_{j=2}^{28} (\sqrt{5j+4} - \sqrt{5j-1})$ を計算せよ.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^{28} (\sqrt{5j+4} - \sqrt{5j-1}) \\ &= \sqrt{14} - \sqrt{9} + \sqrt{19} - \sqrt{14} + \sqrt{24} - \sqrt{19} + \sqrt{29} - \sqrt{24} + \cdots \\ & \quad + \sqrt{134} - \sqrt{129} + \sqrt{139} - \sqrt{134} + \sqrt{144} - \sqrt{139} \end{aligned}$$

問1.2.4 総和 $\sum_{j=2}^{28} (\sqrt{5j+4} - \sqrt{5j-1})$ を計算せよ.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^{28} (\sqrt{5j+4} - \sqrt{5j-1}) \\ &= \sqrt{14} - \sqrt{9} + \sqrt{19} - \sqrt{14} + \sqrt{24} - \sqrt{19} + \sqrt{29} - \sqrt{24} + \cdots \\ & \quad + \sqrt{134} - \sqrt{129} + \sqrt{139} - \sqrt{134} + \sqrt{144} - \sqrt{139} \\ &= -\sqrt{9} + \sqrt{144} = -3 + 12 \\ &= 9 . \end{aligned}$$

終