

8.5

複数の不等式で表される領域

複数の不等式に対して、各々の不等式が表す条件を“かつ”で結んだ条件を考えるとき、それらの不等式を連立するという.

例 変数 x と y に関する不等式 $3x - y \leq 7$ と $x - 2y \geq -1$ との連立不等式を次のように書き表す:

$$\begin{cases} 3x - y \leq 7 \\ x - 2y \geq -1 \end{cases}$$

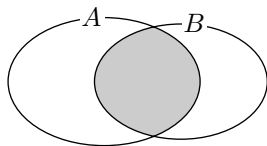
この連立不等式は x の値と y の値とに関する条件 “ $3x - y \leq 7$ かつ $x - 2y \geq -1$ ” を表す.

終

集合 A と集合 B との両方に属するものの全体を A と B との共通部分といい,
 $A \cap B$ と書き表した:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \} .$$

A と B との共通部分 $A \cap B$ の“感じ”を図で表すと右図の網掛けの部分のようになる.



例 xy 座標平面において不等式 $x^2 + y^2 < 25$ と $(x-3)^2 + y^2 < 16$ との連立不等式が表す領域を考える．不等式 $x^2 + y^2 < 25$ が表す領域を A とおき，不等式 $(x-3)^2 + y^2 < 16$ が表す領域を B とおく：

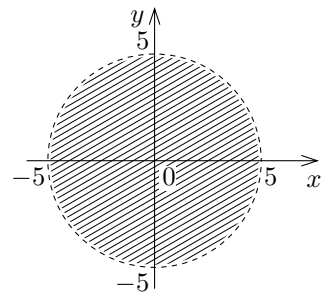
$$A = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 25 \} ,$$

$$B = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-3)^2 + y^2 < 16 \} .$$

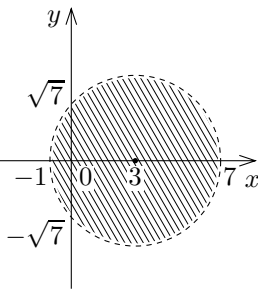
このとき， A と B との共通集合 $A \cap B$ は，

$$A \cap B = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 25 \text{ かつ } (x-3)^2 + y^2 < 16 \} .$$

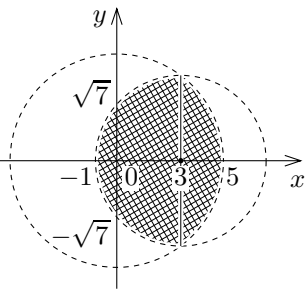
これより，不等式 $x^2 + y^2 < 25$ と $(x-3)^2 + y^2 < 16$ との連立が表す領域は，不等式 $x^2 + y^2 < 25$ が表す領域 A と不等式 $(x-3)^2 + y^2 < 16$ が表す領域 B との共通部分 $A \cap B$ ，つまり領域 A と B との両方に属す点の全体なので，次のようになる．



領域 $x^2 + y^2 < 25$
(境界を含まない)



領域 $(x-3)^2 + y^2 < 16$
(境界を含まない)



領域 $\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ (x-3)^2 + y^2 < 16 \end{cases}$
(境界を含まない) 終

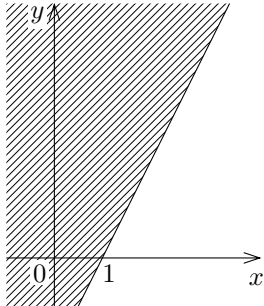
例 xy 座標平面において不等式 $2x - y \leq 2$ と $x - 3y \geq -9$ との連立不等式が表す領域を図示する．不等式 $2x - y \leq 2$ が表す領域を A とおき，不等式 $x - 3y \geq -9$ が表す領域を B とおく：

$$A = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x - y \leq 2 \} , \quad B = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - 3y \geq -9 \} .$$

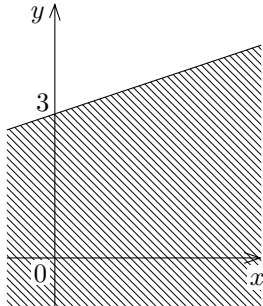
このとき， A と B との共通集合 $A \cap B$ は，

$$A \cap B = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x - y \leq 2 \text{ かつ } x - 3y \geq -9 \} .$$

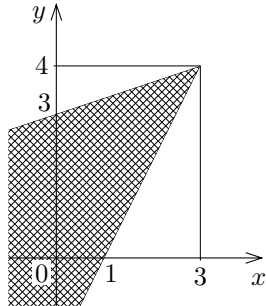
これより，不等式 $2x - y \leq 2$ と $x - 3y \geq -9$ との連立不等式が表す領域は，不等式 $2x - y \leq 2$ つまり $y \geq 2x - 2$ が表す領域 A と不等式 $x - 3y \geq -9$ つまり $y \leq \frac{x}{3} + 3$ が表す領域 B と共通部分 $A \cap B$ ，つまり A と B との両方に属す点の全体なので，次のようになる．



領域 $2x - y \leq 2$
(境界を含む)



領域 $x - 3y \geq -9$
(境界を含む)



領域 $\begin{cases} 2x - y \leq 2 \\ x - 3y \geq -9 \end{cases}$
(境界を含む)

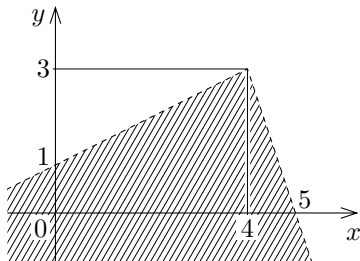
終

問8.5.1 xy 座標平面において不等式 $3x + y < 15$ と $x - 2y > -2$ との連立不等式が表す領域を図示せよ.

$$3x + y < 15 \Leftrightarrow y < -3x + 15.$$

$$x - 2y > -2 \Leftrightarrow y < \frac{x}{2} + 1.$$

不等式 $3x + y < 15$ と $x - 2y > -2$ との連立不等式が表す領域は方程式 $y = -3x + 15$ が表す直線より y 座標が小さい側と方程式 $y = \frac{x}{2} + 1$ が表す直線より y 座標が小さい側との共通部分である.



領域 $\begin{cases} 3x + 7 < 15 \\ x - 2y < -2 \end{cases}$
(境界を含まない)

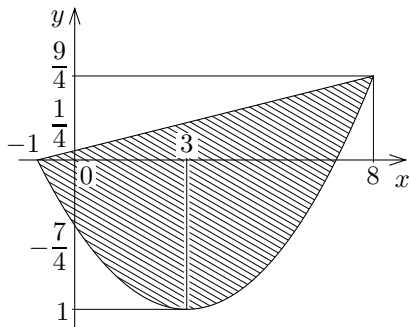
問8.5.2 xy 座標平面において連立不等式 $x^2 - 6x - 7 \leq 4y \leq x + 1$ が表す領域を図示せよ.

$$x^2 - 6x - 7 \leq 4y \Leftrightarrow 4y \geq (x - 3)^2 - 16$$

$$\Leftrightarrow y \geq \frac{1}{4}(x - 3)^2 - 4.$$

$$4y \leq x + 1 \Leftrightarrow y \leq \frac{x + 1}{4}.$$

連立不等式 $x^2 - 6x - 7 \leq 4y \leq x + 1$ が表す領域は、方程式 $y = \frac{1}{4}(x - 3)^2 - 4$ が表す放物線とそれよりより y 座標が大きい側の全体と、方程式 $y = \frac{x + 1}{4}$ が表す直線とそれより y 座標が小さい側の全体との共通部分である.

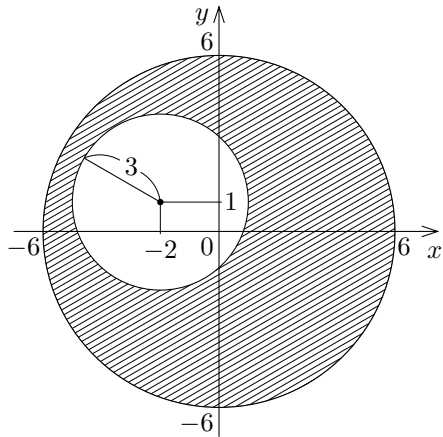


領域 $x^2 - 6x - 7 < 4y < x + 1$
(境界を含む)

問8.5.3 xy 座標平面にお

いて不等式 $x^2 + y^2 \leq 36$ と
 $(x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 9$ との連立
不等式が表す領域を図示せよ.

不等式 $(x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 9$
と $x^2 + y^2 \leq 36$ との連立不等式
が表す領域は、原点 $(0,0)$ を中
心として半径が 6 である円とそ
の内側の全体と、点 $(-2,1)$ を
中心として半径が 3 である円と
その外側の全体との共通部分で
ある.



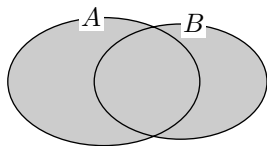
領域
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 36 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 9 \end{cases}$$

(境界を含む)

集合 A か集合 B かの少なくともどちらかに
属す対象の全体を A と B との合併集合あるいは
和集合といい， $A \cup B$ と書き表した：

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ または } x \in B \} .$$

集合 A と集合 B との合併集合 $A \cup B$ の “感じ” を図で表すと上図の網掛けの部分のようになる．



例 xy 座標平面において不等式 $x^2 + y^2 \leq 25$ と $(x-3)^2 + y^2 \leq 16$ とから合成される条件 “ $x^2 + y^2 \leq 25$ または $(x-3)^2 + y^2 \leq 16$ ” が表す領域を考える．不等式 $x^2 + y^2 \leq 25$ が表す領域を A とおき，不等式 $(x-3)^2 + y^2 \leq 16$ が表す領域を B とおく：

$$A = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25 \} ,$$

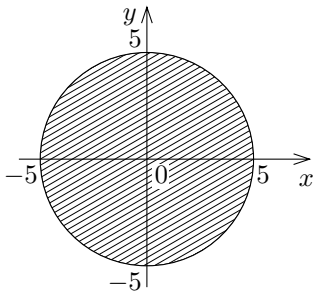
$$B = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-3)^2 + y^2 \leq 16 \} .$$

このとき， A と B との合併集合 $A \cup B$ は，

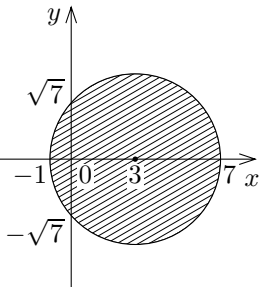
$$A \cup B = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25 \text{ または } (x-3)^2 + y^2 \leq 16 \} .$$

これより，条件 “ $x^2 + y^2 \leq 25$ または $(x-3)^2 + y^2 \leq 16$ ” が表す領域は，不等式 $x^2 + y^2 \leq 25$ が表す領域 A と不等式 $(x-3)^2 + y^2 \leq 16$ が表す領域 B との合併集合 $A \cup B$ ，つまり領域 A と B とを合併した領域である．

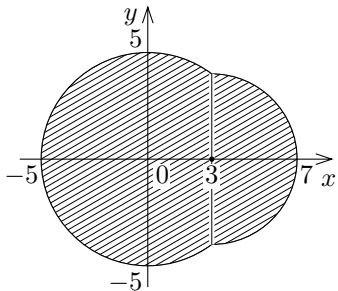
条件 “ $x^2 + y^2 \leq 25$ または $(x-3)^2 + y^2 \leq 16$ ” が表す領域は、不等式 $x^2 + y^2 \leq 25$ が表す領域と不等式 $(x-3)^2 + y^2 \leq 16$ が表す領域とを合併した領域である.



領域 $x^2 + y^2 \leq 25$
(境界を含む)



領域 $(x-3)^2 + y^2 \leq 16$
(境界を含む)



領域 “ $x^2 + y^2 \leq 25$
または $(x-3)^2 + y^2 \leq 16$ ”
(境界を含む)

終

次の定理が成り立つ：各実数 a, b について,

$$ab > 0 \Leftrightarrow “a > 0 \text{ かつ } b > 0” \text{ または } “a < 0 \text{ かつ } b < 0” ,$$

$$ab \geq 0 \Leftrightarrow “a \geq 0 \text{ かつ } b \geq 0” \text{ または } “a \leq 0 \text{ かつ } b \leq 0” ,$$

$$ab < 0 \Leftrightarrow “a > 0 \text{ かつ } b < 0” \text{ または } “a < 0 \text{ かつ } b > 0” ,$$

$$ab \leq 0 \Leftrightarrow “a \geq 0 \text{ かつ } b \leq 0” \text{ または } “a \leq 0 \text{ かつ } b \geq 0” .$$

例 xy 座標平面において不等式 $(x+y-3)(2x-y) \leq 0$ が表す領域を考える.
各実数 x, y について, 不等式 $(x+y-3)(2x-y) \leq 0$ は次の条件と同値である:

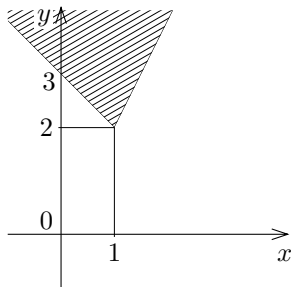
“ $x+y-3 \geq 0$ かつ $2x-y \leq 0$ ” または “ $x+y-3 \leq 0$ かつ $2x-y \geq 0$ ” .
よって, 不等式 $(x+y-3)(2x-y) \leq 0$ が表す領域は,

不等式 $x+y-3 \geq 0$ と $2x-y \leq 0$ との連立不等式が表す領域 A と,
不等式 $x+y-3 \leq 0$ と $2x-y \geq 0$ との連立不等式が表す領域 B と
の合併集合 $A \cup B$, つまり領域 A と B とを合併した領域である.

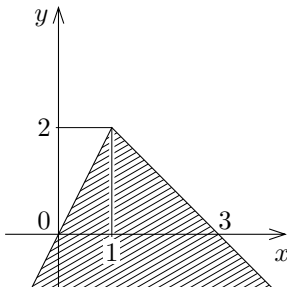
不等式 $(x+y-3)(2x-y) \leq 0$ が表す領域は、

不等式 $x+y-3 \geq 0$ と $2x-y \leq 0$ との連立不等式が表す領域と、

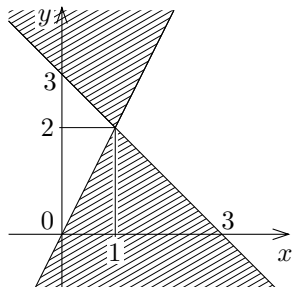
不等式 $x+y-3 \leq 0$ と $2x-y \geq 0$ との連立不等式が表す領域とを合併した領域である。



領域 $\begin{cases} x + y - 3 \geq 0 \\ 2x - y \leq 0 \end{cases}$
(境界を含む)



領域 $\begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$
(境界を含む)



領域 $(x + y - 3)(2x - y) \leq 0$
(境界を含む)

問8.5.4 xy 座標平面において不等式 $(2x+3y-18)(2x-y-2) \geq 0$ が表す領域を図示せよ.

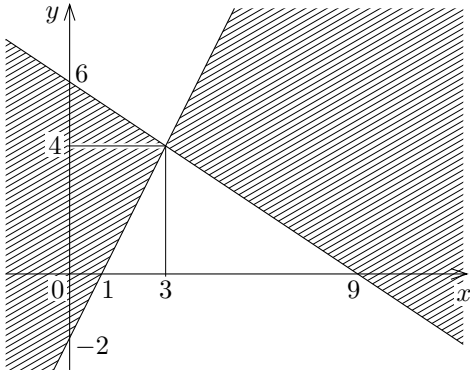
各実数 x, y について, 不等式 $(2x+3y-18)(2x-y-2) \geq 0$ は次の条件と同値である:

“ $2x+3y-18 \geq 0$ かつ $2x-y-2 \geq 0$ ” または

“ $2x+3y-18 \leq 0$ かつ $2x-y-2 \leq 0$ ” .

よって, 不等式 $(2x+3y-18)(2x-y-2) \geq 0$ が表す領域は,

不等式 $2x+3y-18 \geq 0$ と $2x-y-2 \geq 0$ との連立不等式が表す領域と,
不等式 $2x+3y-18 \leq 0$ と $2x-y-2 \leq 0$ との連立不等式が表す領域と
を合併した領域である.



領域 $(2x + 3y - 18)(2x - y - 2) \geq 0$
(境界を含む)