

8.4

円を境界とする領域

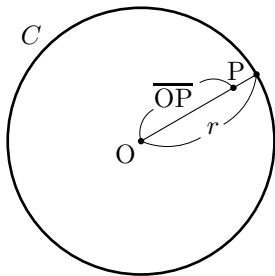
xy 座標平面において、中心が点 O であり半径が正の実数 r である円を C とおく．各点 P について、

$$P \text{ が } C \text{ に属す} \Leftrightarrow \overline{OP} = r .$$

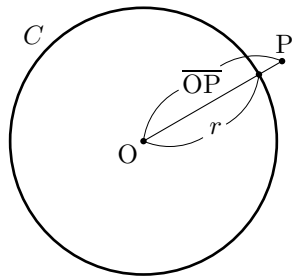
座標平面において円 C の内側と外側とがある．各点 P について，

P が C の内側にある $\Leftrightarrow \overline{OP} < r$,

P が C の外側にある $\Leftrightarrow \overline{OP} > r$.



$\overline{OP} < r$ のとき



$\overline{OP} > r$ のとき

P が C の内側にある $\Leftrightarrow \overline{OP} < r$;

P が C の外側にある $\Leftrightarrow \overline{OP} > r$.

定数 a, b に対して $O = (a, b)$ とし, 変数 x, y に対して $P = (x, y)$ とする.
 $\overline{OP}^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$. $\overline{OP} \geq 0$ かつ $r > 0$ なので,

$$\overline{OP} < r \Leftrightarrow \overline{OP}^2 < r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2 ,$$

$$\overline{OP} > r \Leftrightarrow \overline{OP}^2 > r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2 .$$

中心が点 (a, b) であり半径が r である円 C について,

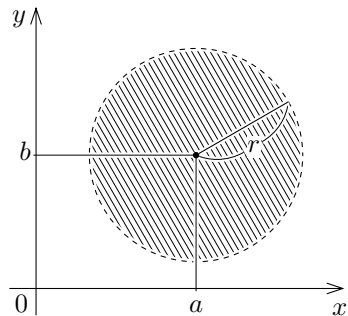
$$\text{点 } (x, y) \text{ が } C \text{ の内側にある } \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2 ,$$

$$\text{点 } (x, y) \text{ が } C \text{ の外側にある } \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2 .$$

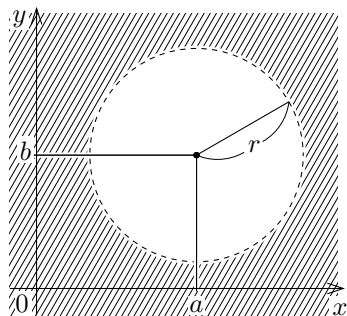
- ・ 不等式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ が表す領域は円 C の内側の全体であり,
- ・ 不等式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ が表す領域は円 C の外側の全体である.

中心が点 (a, b) であり半径が r である円を C とする。円 C について、

- ・ 不等式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ が表す領域は円 C の内側の全体であり、
- ・ 不等式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ が表す領域は円 C の外側の全体である。



領域 $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$
(境界を含まない)

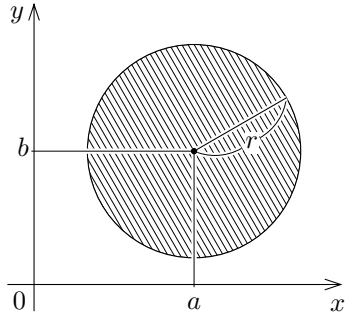


領域 $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$
(境界を含まない)

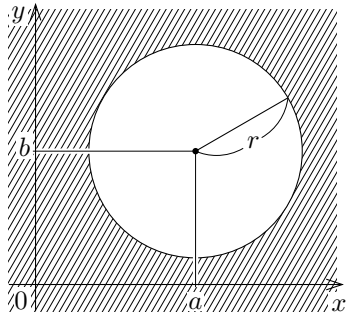
等号を含む不等号による不等式で表される領域は境界を含む. 中心が点 (a, b) であり半径が r である円 C について,

・ 方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ と不等式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ とを併せた不等式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$ が表す領域は円 C とその内側とを併せた全体であり,

・ 方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ と不等式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ とを併せた不等式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \geq r^2$ が表す領域は円 C とその外側とを併せた全体である.



領域 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$
(境界を含む)



領域 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \geq r^2$
(境界を含む)

このようにして次の定理が示せる.

[定理 8.4.1] 定数 a, b, r は実数で $r > 0$ とする. xy 座標平面において以下のことが成り立つ:

(1) 不等式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ が表す領域は中心が点 (a, b) であり半径が r である円の内側の全体である; この領域は境界を含まない.

(2) 不等式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ が表す領域は中心が点 (a, b) であり半径が r である円の外側の全体である; この領域は境界を含まない.

(3) 不等式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$ が表す領域は中心が点 (a, b) であり半径が r である円とその内側とを併せた全体である; この領域は境界を含む.

(4) 不等式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \geq r^2$ が表す領域は中心が点 (a, b) であり半径が r である円とその外側とを併せた全体である; この領域は境界を含む.

例 xy 座標平面において不等式

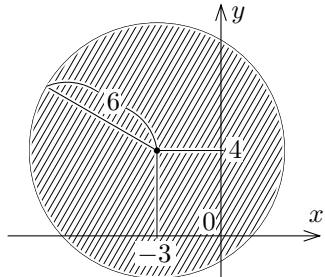
$x^2 + y^2 + 6x - 8y \leq 11$ が表す領域を図示する.

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y \leq 11$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 \leq 11 + 9 + 16$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-4)^2 \leq 36.$$

不等式 $x^2 + y^2 + 6x - 8y \leq 11$ が表す領域は、
中心が点 $(-3, 4)$ であり半径が 6 である円と
その内側とを併せた全体である.



領域 $x^2 + y^2 + 6x - 8y \leq 11$
(境界を含む)

終

例 xy 座標平面において不等式

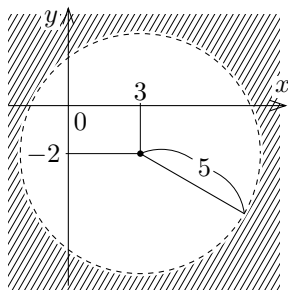
$x^2 + y^2 > 6x - 4y + 12$ が表す領域を図示する.

$$x^2 + y^2 > 6x - 4y + 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 > 12 + 9 + 4$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 > 25 .$$

不等式 $x^2 + y^2 - 6x + 4y > 12$ が表す領域は、
中心が点 $(3, -2)$ であり半径が 5 である円の
外側の全体である.



領域 $x^2 + y^2 - 6x + 4y > 12$
(境界を含まない)

終

問8.4.1 xy 座標平面において不等式 $x^2 + y^2 < 10x - 6y + 15$ が表す領域を図示せよ.

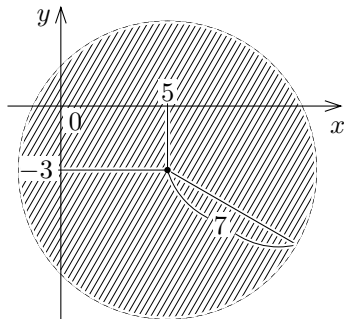
$$x^2 + y^2 < 10x - 6y + 15$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 < 15 + 25 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+3)^2 < 49.$$

不等式 $x^2 + y^2 < 10x - 6y + 15$ が表す領域は、中心が点 $(5, 3)$ であり半径が 7 である円の内側の全体である.

終



領域 $x^2 + y^2 < 10x - 6y + 15$
(境界を含まない)

問8.4.2 xy 座標平面において不等式 $x^2 + y^2 \geq 5 - 8x + 4y$ が表す領域を図示せよ.

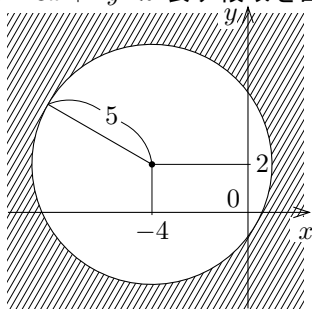
$$x^2 + y^2 \geq 5 - 8x + 4y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 \leq 5 + 16 + 4$$

$$\Leftrightarrow (x + 4)^2 + (y - 2)^2 \geq 25 .$$

不等式 $x^2 + y^2 \geq 5 - 8x + 4y$ が表す領域は、中心が点 $(-4, 2)$ であり半径が 5 である円とその外側とを併せた全体である.

終



領域 $x^2 + y^2 \geq 5 - 8x + 4y$
(境界を含む)

楕円を境界とする領域についても同様の定理が成り立つ.

[定理 8.4.2] 定数 a, b は実数で $a > 0$, $b > 0$ とする. xy 座標平面において以下のことが成り立つ.

(1) 不等式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ が表す領域は方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ が表す楕円の内側の全体である; この領域は境界を含まない.

(2) 不等式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ が表す領域は方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ が表す楕円の外側の全体である; この領域は境界を含まない.

(3) 不等式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ が表す領域は方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ が表す楕円とその内側とを併せた全体である; この領域は境界を含む.

(4) 不等式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$ が表す領域は方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ が表す楕円とその外側とを併せた全体である; この領域は境界を含む.