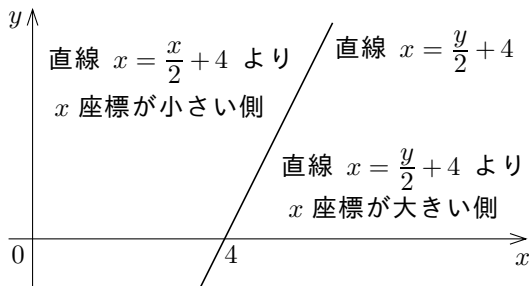
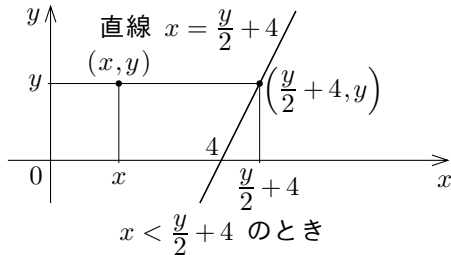
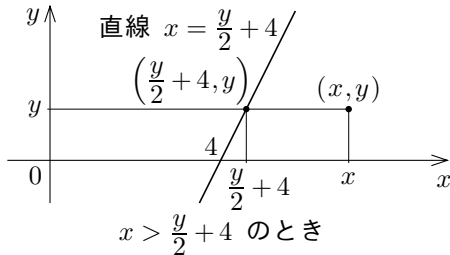


8.3

関数のグラフを境界とする領域

例 xy 座標平面において、
方程式 $x = \frac{y+7}{2}$ で表さ
れる直線より x 座標が大き
い側と x 座標が小さい側と
がある．各実数 x と y と
について、点 (x, y) が直線
 $x = \frac{y+7}{2}$ より x 座標が大
きい側にあるか x 座標が小
さい側にあるかを考える．





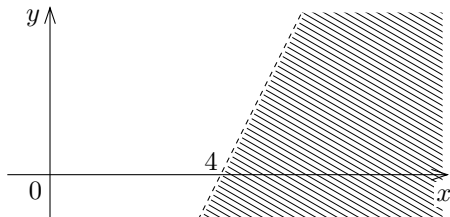
$x > \frac{y}{2} + 4 \Leftrightarrow$ 点 (x, y) は直線 $x = \frac{y}{2} + 4$ より x 座標が大きい側にある ;

$x < \frac{y}{2} + 4 \Leftrightarrow$ 点 (x, y) は直線 $x = \frac{y}{2} + 4$ より x 座標が小さい側にある .

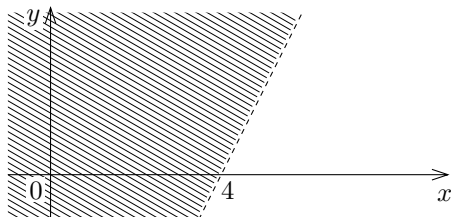
・ 不等式 $x > \frac{y}{2} + 4$ が表す領域は直線 $x = \frac{y}{2} + 4$ より x 座標が大きい側の全体である ;

・ 不等式 $x < \frac{y}{2} + 4$ が表す領域は直線 $x = \frac{y}{2} + 4$ より x 座標が小さい側の全体である .

- ・ 不等式 $x > \frac{y}{2} + 4$ が表す領域は直線 $x = \frac{y}{2} + 4$ より x 座標が大きい側の全体である；
- ・ 不等式 $x < \frac{y}{2} + 4$ が表す領域は直線 $x = \frac{y}{2} + 4$ より x 座標が小さい側の全体である．



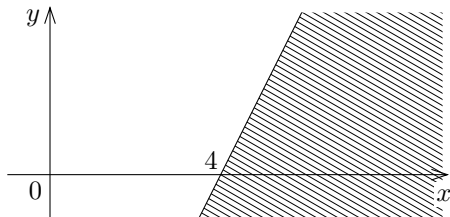
領域 $x > \frac{y}{2} + 4$ (境界を含まない)



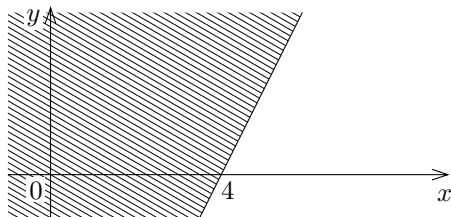
領域 $x < \frac{y}{2} + 4$ (境界を含まない)

等号を含む不等号による不等式で表される領域は境界を含む。

- ・ 方程式 $x = \frac{y}{2} + 4$ と不等式 $x > \frac{y}{2} + 4$ とを併せた不等式 $x \geq \frac{y}{2} + 4$ が表す領域は直線 $x = \frac{y}{2} + 4$ とそれより x 座標が大きい側とを併せた全体である；
- ・ 方程式 $x = \frac{y}{2} + 4$ と不等式 $x < \frac{y}{2} + 4$ とを併せた不等式 $x \leq \frac{y}{2} + 4$ が表す領域は直線 $x = \frac{y}{2} + 4$ とそれより x 座標が小さい側とを併せた全体である。



領域 $x \geq \frac{y}{2} + 4$ (境界を含む)



領域 $x \leq \frac{y}{2} + 4$ (境界を含む)

一般的に述べると次の定理になる.

[定理 8.3] 関数 f に対して, xy 座標平面において方程式 $x = f(y)$ が表す図形について以下のことが成り立つ.

- (1) 不等式 $x > f(y)$ が表す領域は方程式 $x = f(y)$ が表す曲線より x 座標が大きい側の図形である; この領域は境界を含まない.
- (2) 不等式 $x < f(y)$ が表す領域は方程式 $x = f(y)$ が表す曲線より x 座標が小さい側の図形である; この領域は境界を含まない.
- (3) 不等式 $x \geq f(y)$ が表す領域は方程式 $x = f(y)$ が表す曲線とそれより x 座標が大きい側とを併せた図形である; この領域は境界を含む.
- (4) 不等式 $x \leq f(y)$ が表す領域は方程式 $x = f(y)$ が表す曲線とそれより x 座標が小さい側とを併せた図形である; この領域は境界を含む.

xy 座標平面では, 通常は x 軸を右向きにする; このとき, x 座標が大きい側とは右側のことになり, x 座標が小さい側とは左側のことになる.

例 xy 座標平面において不等式 $y^2 - 2x - 8y \leq -12$ が表す領域を図示する.

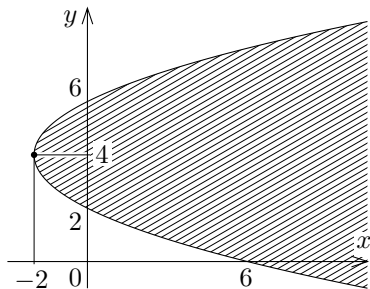
$$y^2 - 2x - 8y \leq -12$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq y^2 - 8y + 12$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq (y - 4)^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}(y - 4)^2 - 2.$$

不等式 $y^2 - 2x - 8y \leq -12$ が表す領域は、方程式 $x = \frac{1}{2}(y - 4)^2 - 2$ が表す放物線とそれより x 座標が大きい側とを併せた全体である.



領域 $y^2 - 2x - 8y \leq -12$
(境界を含む)

終

問8.3.1 xy 座標平面において不等式 $y^2 - 4x + 6y + 5 > 0$ が表す領域を図示せよ.

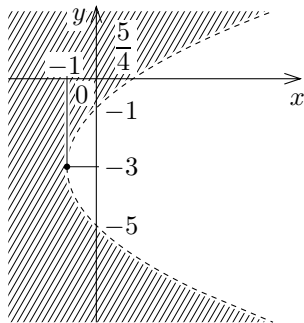
$$y^2 - 4x + 6y + 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4x < y^2 + 6y + 5$$

$$\Leftrightarrow 4x < (y + 3)^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{4}(y + 3)^2 - 1 .$$

不等式 $y^2 - 4x + 6y + 5 > 0$ が表す領域は、
方程式 $x = \frac{1}{4}(y + 3)^2 - 1$ が表す放物線より
 x 座標が小さい側の全体である.



領域 $y^2 - 4x + 6y + 5 > 0$
(境界を含まない) **終**

問8.3.2 xy 座標平面において不等式 $y^2 + 2x - 6y + 5 \leq 0$ が表す領域を図示せよ.

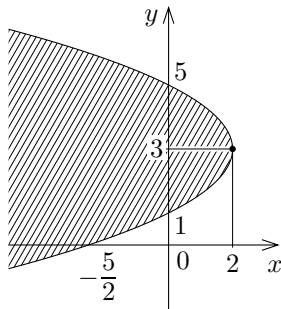
$$y^2 + 2x - 6y + 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq -y^2 + 6y - 5$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq -(y-3)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}(y-3)^2 + 2.$$

不等式 $y^2 + 2x - 6y + 5 \leq 0$ が表す領域は、
方程式 $x = -\frac{1}{2}(y-3)^2 + 2$ が表す放物線と
それより x 座標が小さい側の全体である.



領域 $y^2 + 2x - 6y + 5 \leq 0$
(境界を含む)

終