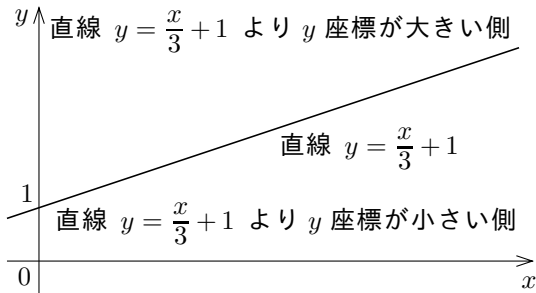
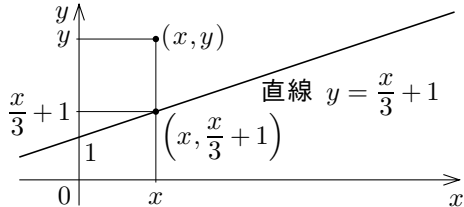


8.2

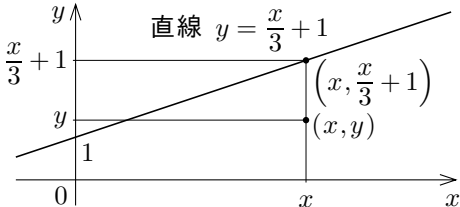
関数のグラフを境界とする領域

例 xy 座標平面において、
方程式 $y = \frac{x}{3} + 1$ で表さ
れる直線より y 座標が大き
い側と y 座標が小さい側と
がある．各実数 x と y と
について、点 (x, y) が直線
 $y = \frac{x}{3} + 1$ より y 座標が大き
い側にあるか y 座標が小さい
側にあるかを考える．





$y > \frac{x}{3} + 1$ のとき



$y < \frac{x}{3} + 1$ のとき

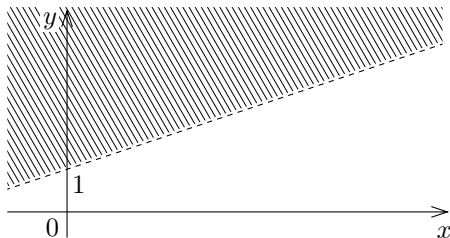
$y > \frac{x}{3} + 1 \Leftrightarrow$ 点 (x, y) は直線 $y = \frac{x}{3} + 1$ より y 座標が大きい側にある ;

$y < \frac{x}{3} + 1 \Leftrightarrow$ 点 (x, y) は直線 $y = \frac{x}{3} + 1$ より y 座標が小さい側にある .

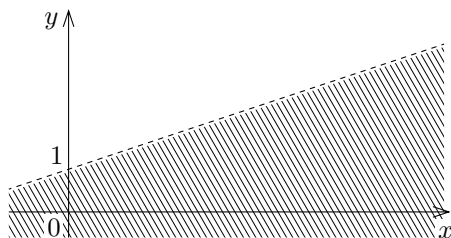
・ 不等式 $y > \frac{x}{3} + 1$ が表す領域は直線 $y = \frac{x}{3} + 1$ より y 座標が大きい側の全体である ;

・ 不等式 $y < \frac{x}{3} + 1$ が表す領域は直線 $y = \frac{x}{3} + 1$ より y 座標が小さい側の全体である .

- ・ 不等式 $y > \frac{x}{3} + 1$ が表す領域は直線 $y = \frac{x}{3} + 1$ より y 座標が大きい側の全体である；
- ・ 不等式 $y < \frac{x}{3} + 1$ が表す領域は直線 $y = \frac{x}{3} + 1$ より y 座標が小さい側の全体である．



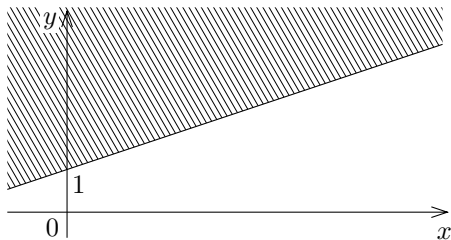
領域 $y > \frac{x}{3} + 1$ (境界を含まない)



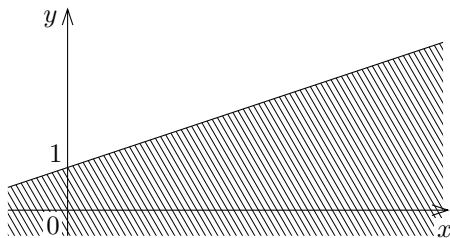
領域 $y < \frac{x}{3} + 1$ (境界を含まない)

等号を含む不等号による不等式で表される領域は境界を含む.

- ・ 方程式 $y = \frac{x}{3} + 1$ と不等式 $y > \frac{x}{3} + 1$ とを併せた不等式 $y \geq \frac{x}{3} + 1$ が表す領域は直線 $y = \frac{x}{3} + 1$ とそれより y 座標が大きい側とを併せた全体である ;
- ・ 方程式 $y = \frac{x}{3} + 1$ と不等式 $y < \frac{x}{3} + 1$ とを併せた不等式 $y \leq \frac{x}{3} + 1$ が表す領域は直線 $y = \frac{x}{3} + 1$ とそれより y 座標が小さい側とを併せた全体である.



領域 $y \geq \frac{x}{3} + 1$ (境界を含む)



領域 $y \leq \frac{x}{3} + 1$ (境界を含む)

一般的に述べると次の定理になる.

[定理 8.2] 関数 f に対して, xy 座標平面において方程式 $y = f(x)$ が表す図形について以下のことが成り立つ.

- (1) 不等式 $y > f(x)$ が表す領域は方程式 $y = f(x)$ が表す曲線より y 座標が大きい側の全体である; この領域は境界を含まない.
- (2) 不等式 $y < f(x)$ が表す領域は方程式 $y = f(x)$ が表す曲線より y 座標が小さい側の全体である; この領域は境界を含まない.
- (3) 不等式 $y \geq f(x)$ が表す領域は方程式 $y = f(x)$ が表す曲線とそれより y 座標が大きい側とを併せた全体である; この領域は境界を含む.
- (4) 不等式 $y \leq f(x)$ が表す領域は方程式 $y = f(x)$ が表す曲線とそれより y 座標が小さい側とを併せた全体である; この領域は境界を含む.

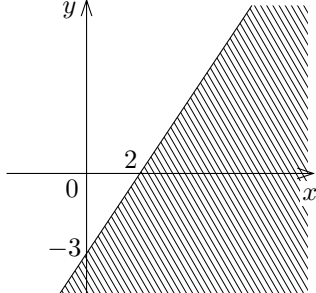
xy 座標平面では, 通常は y 軸を上向きにする; このとき, y 座標が大きい側とは上側のことになり, y 座標が小さい側とは下側こととなる.

例 xy 座標平面において不等式
 $3x - 2y \geq 6$ が表す領域を図示する.

$$3x - 2y \geq 6 \Leftrightarrow 2y \leq 3x - 6$$

$$\Leftrightarrow y \leq \frac{3}{2}x - 3.$$

方程式 $y = \frac{3}{2}x - 3$ が表す直線とそれより y 座標が小さい側とを併せた全体である.



領域 $3x - 2y \geq 6$
(境界を含む)

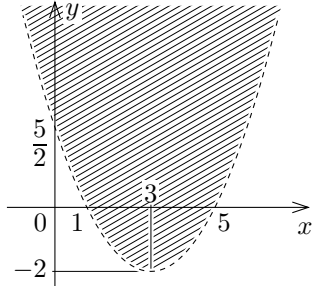
終

例 xy 座標平面において不等式

$x^2 - 6x - 2y < -5$ が表す領域を図示する.

$$\begin{aligned}x^2 - 6x - 2y < -5 &\Leftrightarrow 2y > x^2 - 6x + 5 \\&\Leftrightarrow 2y > (x - 3)^2 - 4 \\&\Leftrightarrow y > \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2 .\end{aligned}$$

不等式 $x^2 - 6x - 2y < -5$ が表す領域は,
方程式 $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$ が表す放物線より
 y 座標が大きい側の全体である.



領域 $y > x^2 - 6x + 5$

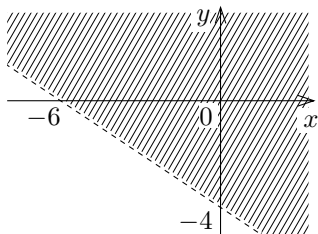
(境界を含まない) **終**

問8.2.1 xy 座標平面において不等式 $2x + 3y + 12 > 0$ が表す領域を図示せよ.

$$2x + 3y + 12 > 0 \Leftrightarrow 3y > -2x - 12$$

$$\Leftrightarrow y > -\frac{2}{3}x - 4.$$

不等式 $2x + 3y + 12 > 0$ が表す領域は、
方程式 $y = -\frac{2}{3}x - 4$ が表す直線より y
座標が大きい側の全体である.



領域 $2x + 3y + 12 > 0$
(境界を含まない)

終

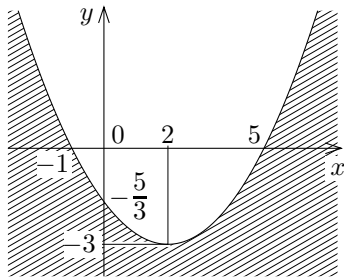
問8.2.2 xy 座標平面において不等式 $x^2 \geq 4x + 3y + 5$ が表す領域を図示せよ.

$$x^2 \geq 4x + 3y + 5 \Leftrightarrow 3y \leq x^2 - 4x - 5$$

$$\Leftrightarrow 3y \leq (x-2)^2 - 9$$

$$\Leftrightarrow y \leq \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3.$$

不等式 $x^2 \geq 4x + 3y + 5$ が表す領域は、方程式 $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$ が表す放物線とそれより y 座標が小さい側の全体である.



領域 $x^2 \geq 4x + 3y + 5$
(境界を含む)

終