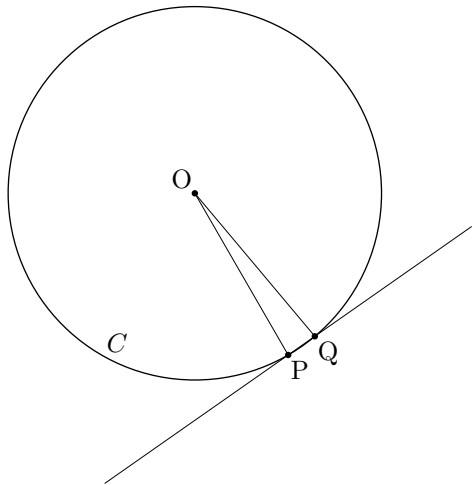


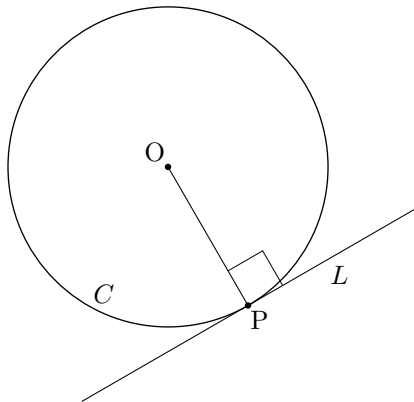
7.8

円の接線

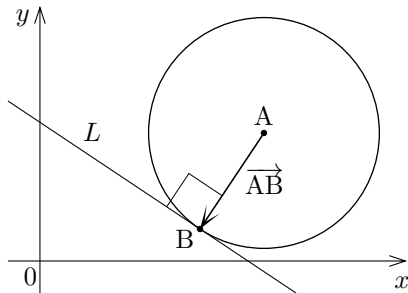
平面において、中心が点 O である円 C に属す点 P と Q について $P \neq Q$ とする. 三角形 OPQ において $\overline{OP} = \overline{OQ}$ なので, $\angle OPQ = \angle OQP$. 点 P と Q とが限りなく近づいていくと, $\angle POQ$ は 0° に限りなく近付くので, $\angle OPQ = \angle OQP$ は 90° に限りなく近付く. このように考えると次の定理が導かれる.



[定理 7.8] 中心が点 O である円 C と直線 L とが点 P 共有するとき,
 L は C の点 P における接線である $\Leftrightarrow L$ は直線 OP と垂直である .



例 xy 座標平面において、中心が点 $A = (7, 4)$ である円の点 $B = (5, 1)$ における接線 L を表す方程式を求め
 る．定理 7.8 により直線 AB と接線 L
 と垂直なので、直線 AB の方向ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と L の方向ベクトルとは垂直
 である；従って $\overrightarrow{AB}$ は L の法線ベク
 トルである．直線 AB の方向ベクトル $\overrightarrow{AB} = (5, 1) - (7, 4) = (-2, -3)$ は L の
 法線ベクトルである．ベクトル $(2, 3)$



も L の法線ベクトルである．よって、ある定数 c をとると L は方程式 $2x + 3y = c$ で表される． $P = (5, 1)$ は L に属するので、 $2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = c$, $c = 13$. 接線 L は方程式 $2x + 3y = 13$ で表される.

終

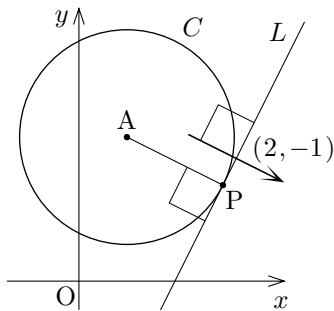
問7.8.1 xy 座標平面において、中心が点 $A = (8, 6)$ である円の点 $B = (5, 2)$ における接線 L を表す方程式を求めよ.

直線 AB と接線 L とは垂直なので、ベクトル $\overrightarrow{AB} = (5, 2) - (8, 6) = (-3, -4)$ は L の法線ベクトルである. ベクトル $(3, 4)$ も L の法線ベクトルである. よって、ある定数 c をとると、 L は方程式 $3x + 4y = c$ で表される. $P = (5, 2)$ は L に属するので、 $3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = c$, $c = 23$. 接線 L は方程式 $3x + 4y = 23$ で表される.

終

例 xy 座標平面において、中心が点 $A = (1, 3)$ である円 C の接線 L が方程式 $2x - y = 4$ で表されるとする. L と C との接点を求める.

例 xy 座標平面において，中心が点 $A = (1, 3)$ である円 C の接線 L が方程式 $2x - y = 4$ で表されるとする． L と C との接点を求める．円 C と接線 L との接点を P とおく． P は C の中心 A から直線 L に下した垂線の足である． $A \notin L$ なので $P \neq A$ ．定理 7.8 により直線 AP と接線 L とは垂直なので， L の法線ベクトル $(2, -1)$ と直線 AP の法線ベクトルと垂直である．よってベクトル $(2, -1)$ は直線 AP の方向ベクトルである．従って，ある実数 t をとると，原点 O に対して，



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t(2, -1) = (1, 3) + (2t, -t) = (2t + 1, -t + 3) .$$

よって $P = (2t + 1, -t + 3)$ ． P は方程式 $2x - y = 4$ で表される直線 L に属するので， $2(2t + 1) - (-t + 3) = 4$ ， $5t = 5$ ， $t = 1$ ．よって $P = (2t + 1, -t + 3) = (3, 2)$ ． L と C との接点は $(3, 2)$ である．

例 xy 座標平面において、中心が点 $A = (1, 3)$ である円 C の接線 L が方程式 $2x - y = 4$ で表されるとする． L と C との接点を求める．別解を述べる．

例 xy 座標平面において、中心が点 $A = (1, 3)$ である円 C の接線 L が方程式 $2x - y = 4$ で表されたとする． L と C との接点を求める．円 C の半径を r とおく．直線 L が円 C の接線なので、定理 7.7 より、 L を表す方程式 $2x - y = 4$ と C を表す方程式 $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2$ との連立方程式の解が重解である． $2x - y = 4$ より $y = 2x - 4$ ；これを $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2$ に代入して x の 2 次式として平方完成する：

$$(x - 1)^2 + (2x - 7)^2 = r^2 ,$$

$$5x^2 - 30x = r^2 - 50 ,$$

$$5(x^2 - 6x + 9) = r^2 - 50 + 45 ,$$

$$5(x - 3)^2 = r^2 - 5 .$$

この x に関する 2 次方程式の解が重解なので、 $r^2 - 5 = 0$, $(x - 3)^2 = 0$, $x = 3$. このとき $y = 2x - 4 = 2$. L と C との接点は $(3, 2)$ である． **終**

問7.8.2 xy 座標平面において，方程式 $x+3y=9$ で表される直線 L が，中心が点 $A=(-4,1)$ である円 C に接するとする． L と C との接点を求めよ．

接線 L と円 C との接点を P とおく． $A \notin L$ なので $P \neq A$ ．直線 AP と接線 L とは垂直である． L の法線ベクトル $(1,3)$ は，直線 AP の法線ベクトルと垂直なので，直線 AP の方向ベクトルである．よって，ある実数 t をとると，原点 O に対して，

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t(1,3) = (-4,1) + (t,3t) = (t-4,3t+1) .$$

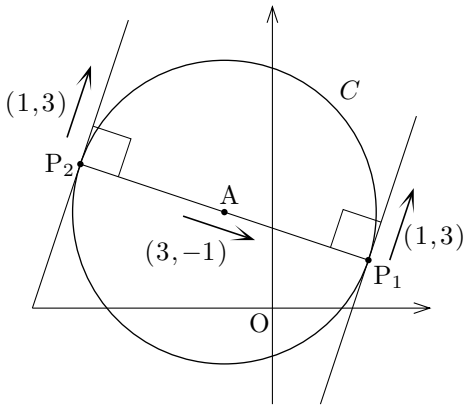
よって $P = (t-4,3t+1)$ ． P は方程式 $x+3y=9$ で表される直線 L に属するので， $t-4+3(3t+1)=9$ ， $10t=10$ ， $t=1$ ．よって $P = (t-4,3t+1) = (-3,4)$ ． L と C との接点は $(-3,4)$ である．

終

例 座標平面において，中心が点 $A = (-2, 4)$ であり半径が $2\sqrt{10}$ である円 C の接線 L の一つの方法ベクトルが $(1, 3)$ であるとする． C と L との接点を求める．二つの解法を述べる．

例 座標平面において，中心が点 $A = (-2, 4)$ であり半径が $2\sqrt{10}$ である円 C の接線 L の一つ方向ベクトルが $(1, 3)$ であるとする． C と L との接点を求める．ベクトル $(1, 3)$ が L の方向ベクトルなので，このベクトルと垂直なベクトル $(3, -1)$ は L の法線ベクトルである． C と L との接点を P とおく．直線 AP と接線 L とは垂直なので，直線 AP の方向ベクトル $\overrightarrow{AP}$ と L の法線ベクトル $(3, -1)$ とは平行である．従ってある定数 k をとると $\overrightarrow{AP} = k(3, -1)$ ．
 $|(3, -1)| = \sqrt{10}$ なので，

$$|\overrightarrow{AP}| = |k(3, -1)| = |k| |(3, -1)| = \sqrt{10} |k| .$$



$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{10}|k| .$$

点 P は円 C に属するので $|\overrightarrow{AP}| = \overline{AP} = 2\sqrt{10}$, 従って, $|k|\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$,
 $|k| = 2$, $k = \pm 2$. よって $\overrightarrow{AP} = k(3, -1) = \pm 2(3, -1) = \pm(6, -2)$. 原点 O
 に対して,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = (-2, 4) \pm (6, -2) = (4, 2), (-8, 6) .$$

C と L との接点は (4, 2) または (-8, 6) である.

例 座標平面において，中心が点 $A = (-2, 4)$ であり半径が $2\sqrt{10}$ である円 C の接線 L の一つの方法ベクトルが $(1, 3)$ であるとする． C と L との接点を求める．別解を述べる．

例 座標平面において，中心が点 $A = (-2, 4)$ であり半径が $2\sqrt{10}$ である円 C の接線 L の一つの方法ベクトルが $(1, 3)$ であるとする． C と L との接点を求める． xy 座標平面において考える．接線 L の一つの方法ベクトルが $(1, 3)$ なので，ある定数 c をとると， L は方程式 $3x - y = c$ で表される．直線 L が円 C の接線なので，定理 7.8 より， L を表す方程式 $3x - y = c$ と C を表す方程式 $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 40$ との連立方程式の解が重解である． $3x - y = c$ より $y = 3x - c$ ；これを $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 40$ に代入して x の 2 次式として平方完成する：

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 + (3x - c - 4)^2 &= 40, \\ 10x^2 - (6c + 20)x &= -c^2 - 8c + 20, \\ 10\left\{x^2 - \frac{3c + 10}{5} \cdot x + \left(\frac{3c + 10}{10}\right)^2\right\} &= -c^2 - 8c + 20 + \frac{(3c + 10)^2}{10}, \\ 10\left(x - \frac{3c + 10}{10}\right)^2 &= -\frac{c^2 + 20c - 300}{10}. \end{aligned}$$

$$10\left(x - \frac{3c+10}{10}\right)^2 = -\frac{c^2+20c-300}{10}.$$

この x に関する 2 次方程式の解が重解なので、 $c^2+20c-300=0$,
 $(c-10)(c+30)=0$, $c=10$ または $c=-30$. よって $c=10$ または
 $c=-30$. このとき、 $\left(x - \frac{3c+10}{10}\right)^2 = 0$ なので $x = \frac{3c+10}{10}$. $c=10$
 のとき、 $x=4$ かつ $y=3x-c=2$. $c=-30$ のとき、 $x=-8$ かつ
 $y=3x-c=6$. C と L との接点は $(4,2)$ または $(-8,6)$ である.

終

問7.8.3 座標平面において、ベクトル $(1,2)$ が方向ベクトルである直線 L が、中心が点 $A = (-3,4)$ であり半径が $3\sqrt{5}$ である円 C に接するとする． C と L との接点を求めよ．

ベクトル $(1,2)$ が L の方向ベクトルなので、このベクトルと垂直なベクトル $(2,-1)$ は L の法線ベクトルである． C と L との接点を P とおく．直線 AP と接線 L とは垂直なので、ベクトル $\overrightarrow{AP}$ と L の法線ベクトル $(2,-1)$ とは平行である．従ってある定数 k をとると $\overrightarrow{AP} = k(2,-1)$ ． $|(2,-1)| = \sqrt{5}$ なので、

$$|\overrightarrow{AP}| = |k(2,-1)| = |k|| (2,-1)| = \sqrt{5}|k| .$$

点 P は円 C に属するので $|\overrightarrow{AP}| = \overline{AP} = 3\sqrt{5}$ ，従って、 $|k|\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ ， $|k| = 3$ ， $k = \pm 3$ ．よって $\overrightarrow{AP} = k(2,-1) = \pm 3(2,-1) = \pm(6,-3)$ ．原点 O に対して、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = (-3, 4) \pm (6, -3) = (3, 1), (-9, 7) .$$

C と L との接点は $(3, 1)$ または $(-9, 7)$ である.

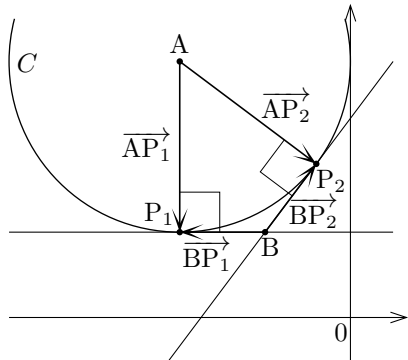
終

例 座標平面において，中心が点 $A = (-2, 3)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $B = (-1, 1)$ が属すとする． C と L との接点を求める．実数 x, y について，点 $P = (x, y)$ が C の接線 L の接点であるとする．点 (x, y) が C に属するので， $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ ，よって

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = -9 . \quad (1)$$

ベクトル $\overrightarrow{AP} = (x, y) - (-2, 3) = (x+2, y-3)$ とベクトル $\overrightarrow{BP} = (x, y) - (-1, 1) = (x+1, y-1)$ とは垂直なので， $(x+2, y-3) \cdot (x+1, y-1) = 0$ ， $(x+2)(x+1) + (y-3)(y-1) = 0$ ，よって

$$x^2 + y^2 + 3x - 4y = -5 . \quad (2)$$



$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = -9 . \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 3x - 4y = -5 . \quad (2)$$

等式 (1) から等式 (2) を辺々引くと $x - 2y = -4$, よって $x = 2y - 4$.
 これを方程式 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ に代入すると, $(2y-2)^2 + (y-3)^2 = 4$,
 $5y^2 - 14y + 9 = 0$, $(y-1)(5y-9) = 0$, $y = 1$ または $y = \frac{9}{5}$. $x = 2y - 4$
 なので, $(x, y) = (-2, 1)$ または $(x, y) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$. C と L との接点は
 $(-2, 1)$ であるかまたは $\left(-\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$ である. 終

問7.8.4 座標平面において、点 $A = (2, -1)$ が属す直線 L が、中心が点 $B = (-1, -2)$ であり半径が 3 である円 C に接するとする. C と L との接点を求めよ.

実数 x, y について、点 $P = (x, y)$ が C の接線 L の接点であるとする. 点 (x, y) が C に属するので、 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$, よって

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y = 4 . \quad (1)$$

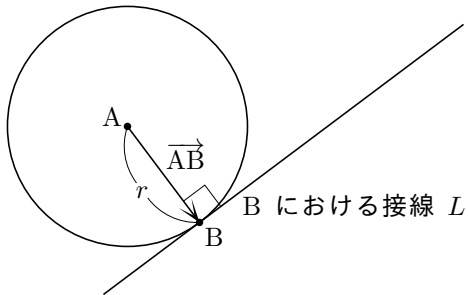
ベクトル $\overrightarrow{BP} = (x, y) - (-1, -2) = (x+1, y+2)$ とベクトル $\overrightarrow{AP} = (x, y) - (2, -1) = (x-2, y+1)$ とは垂直なので、 $(x-2, y+1) \cdot (x+1, y+2) = 0$,
 $(x-2)(x+1) + (y+1)(y+2) = 0$, よって

$$x^2 + y^2 - x + 3y = 0 . \quad (2)$$

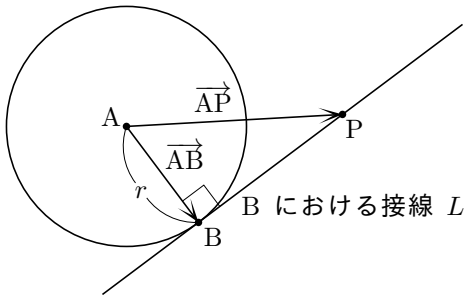
等式 (1) から等式 (2) を辺々引くと $3x + y = 4$, よって $y = 4 - 3x$. これを方程式 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$ に代入すると、 $(x+1)^2 + (6-3x)^2 = 9$,

$10x^2 - 34x + 28 = 0$, $5x^2 - 17x + 14 = 0$, $(x-2)(5x-7) = 0$, $x = 2$ または $x = \frac{7}{5}$. $y = 4 - 3x$ なので, $(x, y) = (2, -2)$ または $(x, y) = \left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.
 C と L との接点は $(2, -2)$ であるかまたは $\left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ である. □終

座標平面において，中心が点 A であり半径が正の実数 r である円の点 B における接線を L とおく． $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB} = r$ ．

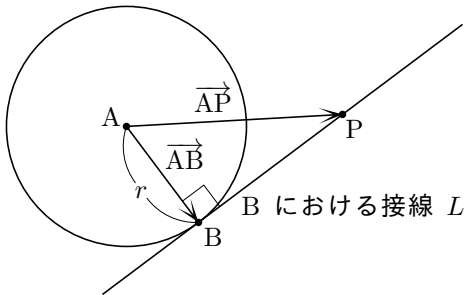


座標平面において、中心が点 A であり半径が正の実数 r である円の点 B における接線を L とおく． $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB} = r$ ． 各点 P について， $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}$ なので，



座標平面において、中心が点 A であり半径が正の実数 r である円の点 B における接線を L とおく． $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB} = r$ ． 各点 P について， $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}$ なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} - |\overrightarrow{AB}|^2 \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} - r^2 .\end{aligned}$$

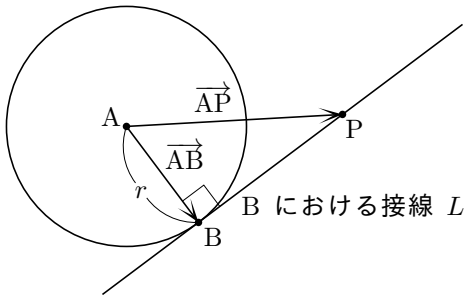


座標平面において、中心が点 A であり半径が正の実数 r である円の点 B における接線を L とおく． $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB} = r$ ． 各点 P について、 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}$ なので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} - |\overrightarrow{AB}|^2 \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} - r^2 .\end{aligned}$$

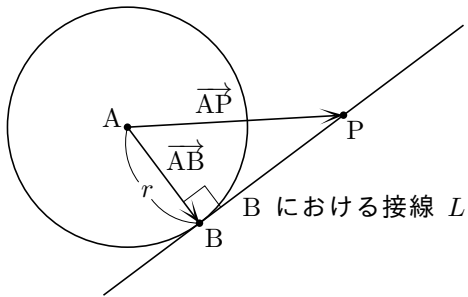
よって、

$$\begin{aligned}P \in L &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BP} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} - r^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = r^2 .\end{aligned}$$



座標平面において，中心が点 A であり半径が正の実数 r である円の点 B における接線を L とおく．各点 P について，

$$P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = r^2 .$$



座標平面において、中心が点 A であり半径が正の実数 r である円の点 B における接線を L とおく．各点 P について、

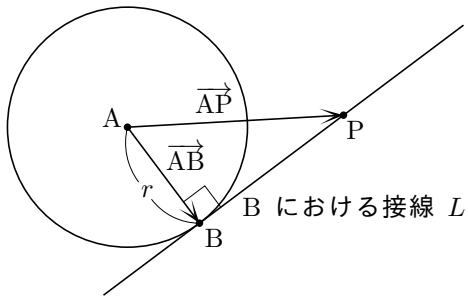
$$P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = r^2 .$$

$A = (a, b)$, $B = (x_0, y_0)$,

$P = (x, y)$ とおくと、

$$\overrightarrow{AB} = (x_0, y_0) - (a, b) = (x_0 - a, y_0 - b) ,$$

$$\overrightarrow{AP} = (x, y) - (a, b) = (x - a, y - b) ,$$



座標平面において、中心が点 A であり半径が正の実数 r である円の点 B における接線を L とおく．各点 P について，

$$P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = r^2 .$$

$A = (a, b)$, $B = (x_0, y_0)$,

$P = (x, y)$ とおくと，

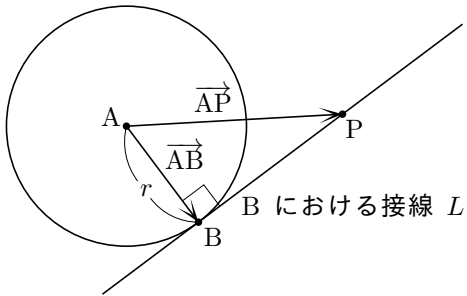
$$\overrightarrow{AB} = (x_0, y_0) - (a, b) = (x_0 - a, y_0 - b) ,$$

$$\overrightarrow{AP} = (x, y) - (a, b) = (x - a, y - b) ,$$

よって

$$(x, y) \in L \Leftrightarrow (x_0 - a, y_0 - b) \cdot (x - a, y - b) = r^2$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2 .$$



こうして次の定理が導かれた.

[定理] xy 座標平面において中心が点 (a, b) であり半径が正の実数 r である円に属す点 (x_0, y_0) における接線はは次の方程式で表される:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2 .$$

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．4通りの解法を述べる．

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．

円の中心と接点とを結ぶ線分が接線と垂直であることを用いる．

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属すとする．接線 L を表す方程式を求める．

円 C と接線 L との接点を (p,q) とおく．ベクトル $(p,q) - (1,2) = (p-1, q-2)$ と $(p,q) - (3,1) = (p-3, q-1)$ とが垂直なので，
 $(p-1, q-2) \cdot (p-3, q-1) = 0$ ，

$$(p-1)(p-3) + (q-2)(q-1) = 0 . \quad (1)$$

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．

円 C と接線 L との接点を (p,q) とおく．ベクトル $(p,q) - (1,2) = (p-1, q-2)$ と $(p,q) - (3,1) = (p-3, q-1)$ とが垂直なので，
 $(p-1, q-2) \cdot (p-3, q-1) = 0$ ，

$$(p-1)(p-3) + (q-2)(q-1) = 0 . \quad (1)$$

接点 (p,q) は方程式 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ で表される円 C に属するので，

$$(p-1)^2 + (q-2)^2 = 4 . \quad (2)$$

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属すとする．接線 L を表す方程式を求める．

円 C と接線 L との接点を (p,q) とおく．ベクトル $(p,q) - (1,2) = (p-1, q-2)$ と $(p,q) - (3,1) = (p-3, q-1)$ とが垂直なので，
 $(p-1, q-2) \cdot (p-3, q-1) = 0$ ，

$$(p-1)(p-3) + (q-2)(q-1) = 0 . \quad (1)$$

接点 (p,q) は方程式 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ で表される円 C に属するので，

$$(p-1)^2 + (q-2)^2 = 4 . \quad (2)$$

等式 (2) から等式 (1) を辺々引くと， $2(p-1) - (q-2) = 4$ ， $q = 2p - 4$. この方程式と方程式 (2) とより， $(p,q) = (3,2), \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする. 接線 L を表す方程式を求める.

円 C と接線 L との接点を (p,q) とおく. ベクトル $(p,q) - (1,2) = (p-1, q-2)$ と $(p,q) - (3,1) = (p-3, q-1)$ とが垂直なので,
 $(p-1, q-2) \cdot (p-3, q-1) = 0$,

$$(p-1)(p-3) + (q-2)(q-1) = 0 . \quad (1)$$

接点 (p,q) は方程式 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ で表される円 C に属するので,

$$(p-1)^2 + (q-2)^2 = 4 . \quad (2)$$

等式 (2) から等式 (1) を辺々引くと, $2(p-1) - (q-2) = 4$, $q = 2p - 4$. この方程式と方程式 (2) とより, $(p,q) = (3,2), \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$. 点 $\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$ を接点とする接線は方程式 $3x - 4y = 5$ で表される. 点 $(3,2)$ を接点とする接線は方程式 $x = 3$ で表される. 故に, 接線 L は, 方程式 $x = 3$ で表される直線あるいは方程式 $3x - 4y = 5$ で表される直線である.

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．
円の接線の公式を用いる．

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．

円 C と接線 L との接点を (p,q) とおく． L は方程式 $(p-1)(x-1)+(q-2)(y-2)=4$ で表される．点 $(3,1)$ が L に属するので， $2(p-1)-(q-2)=4$ ， $q=2p-4$ ．

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．

円 C と接線 L との接点を (p,q) とおく． L は方程式 $(p-1)(x-1)+(q-2)(y-2)=4$ で表される．点 $(3,1)$ が L に属するので， $2(p-1)-(q-2)=4$ ， $q=2p-4$ ．接点 (p,q) は方程式 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ で表される円 C に属するので $(p-1)^2+(q-2)^2=4$ ．これらの方程式より， $(p,q)=(3,2), \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$ ．

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．

円 C と接線 L との接点を (p,q) とおく． L は方程式 $(p-1)(x-1)+(q-2)(y-2)=4$ で表される．点 $(3,1)$ が L に属するので， $2(p-1)-(q-2)=4$ ， $q=2p-4$ ．接点 (p,q) は方程式 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ で表される円 C に属するので $(p-1)^2+(q-2)^2=4$ ．これらの方程式より， $(p,q)=(3,2), \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$ ．点 $\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$ を接点とする接線は方程式 $3x-4y=5$ で表される．点 $(3,2)$ を接点とする接線は方程式 $x=3$ で表される．故に，接線 L は，方程式 $x=3$ で表される直線あるいは方程式 $3x-4y=5$ で表される直線である．

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．

座標平面における点と直線との間の距離の公式を用いる．

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．

接線 L を表す方程式を $ax+by+c=0$ (a, b, c は定数) とおく． L の法線ベクトル (a, b) は単位ベクトルであるとする． $a^2+b^2=1$ ．点 $(3,1)$ が L に属するので， $3a+b+c=0$ ， $c=-3a-b$ ．円 C の中心 $(1,2)$ と接線 L との間の距離が 2 なので， $|a+2b+c|=|a+2b-3a-b|=2$ ， $-2a+b=\pm 2$ ， $b=2a\pm 2$ ．

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．

接線 L を表す方程式を $ax+by+c=0$ (a, b, c は定数) とおく． L の法線ベクトル (a, b) は単位ベクトルであるとする． $a^2+b^2=1$ ．点 $(3,1)$ が L に属するので， $3a+b+c=0$ ， $c=-3a-b$ ．円 C の中心 $(1,2)$ と接線 L との間の距離が 2 なので， $|a+2b+c|=|a+2b-3a-b|=2$ ， $-2a+b=\pm 2$ ， $b=2a\pm 2$ ． $b=2a+2$ のとき， $a^2+(2a+2)^2=1$ ， $5a^2+8a+4=1$ ， $5a^2+8a+3=0$ ， $(a+1)(5a+3)=0$ ， $a=-1, -\frac{3}{5}$ ，よって $(a, b, c) = (-1, 0, 3), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$ ．

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．

接線 L を表す方程式を $ax+by+c=0$ (a, b, c は定数) とおく． L の法線ベクトル (a, b) は単位ベクトルであるとする． $a^2+b^2=1$ ．点 $(3,1)$ が L に属するので， $3a+b+c=0$ ， $c=-3a-b$ ．円 C の中心 $(1,2)$ と接線 L との間の距離が 2 なので， $|a+2b+c|=|a+2b-3a-b|=2$ ， $-2a+b=\pm 2$ ， $b=2a\pm 2$ ． $b=2a+2$ のとき， $a^2+(2a+2)^2=1$ ， $5a^2+8a+4=1$ ， $5a^2+8a+3=0$ ， $(a+1)(5a+3)$ ， $a=-1, -\frac{3}{5}$ ，よって $(a, b, c)=(-1, 0, 3), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$ ． $b=2a-2$ のとき， $a^2+(2a-2)^2=1$ ， $5a^2-8a+4=1$ ， $5a^2-8a+3=0$ ， $(a-1)(5a-3)$ ， $a=1, \frac{3}{5}$ ，

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．

接線 L を表す方程式を $ax+by+c=0$ (a, b, c は定数) とおく． L の法線ベクトル (a, b) は単位ベクトルであるとする． $a^2+b^2=1$ ．点 $(3,1)$ が L に属するので， $3a+b+c=0$ ， $c=-3a-b$ ．円 C の中心 $(1,2)$ と接線 L との間の距離が 2 なので， $|a+2b+c|=|a+2b-3a-b|=2$ ， $-2a+b=\pm 2$ ， $b=2a\pm 2$ ． $b=2a+2$ のとき， $a^2+(2a+2)^2=1$ ， $5a^2+8a+4=1$ ， $5a^2+8a+3=0$ ， $(a+1)(5a+3)$ ， $a=-1, -\frac{3}{5}$ ，よって $(a, b, c)=(-1, 0, 3), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$ ． $b=2a-2$ のとき， $a^2+(2a+2)^2=1$ ， $5a^2-8a+4=1$ ， $5a^2-8a+3=0$ ， $(a-1)(5a-3)$ ， $a=1, \frac{3}{5}$ ，よって $(a, b, c)=(1, 0, -3), \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -1\right)$ ．接線 L は，方程式 $x=3$ で表される直線あるいは方程式 $3x-4y=5$ で表される直線である．

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．

円の接線を表す方程式と円を表す方程式との連立方程式の解が重解であることを用いる．

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．

接線 L が x 軸に垂直でないときを考える． L の傾きを a とおく．点 $(3,1)$ が L に属するので， L は方程式 $y = a(x-3)+1$ で表される．この方程式と円 C を表す方程式 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ とを連立する．

$$(x-1)^2 + \{a(x-3)+1-2\}^2 = 4 ,$$
$$\frac{a^2+1}{2}x^2 - (3a^2+a+1)x + \frac{9a^2+6a-2}{2} = 0 .$$

この x に関する 2 次方程式の解が重解になればよい．

例 xy 座標平面において中心が点 $(1,2)$ であり半径が 2 である円 C の接線 L に点 $(3,1)$ が属するとする．接線 L を表す方程式を求める．

接線 L が x 軸に垂直でないときを考える． L の傾きを a とおく．点 $(3,1)$ が L に属するので， L は方程式 $y = a(x-3)+1$ で表される．この方程式と円 C を表す方程式 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ とを連立する．

$$(x-1)^2 + \{a(x-3)+1-2\}^2 = 4 ,$$
$$\frac{a^2+1}{2}x^2 - (3a^2+a+1)x + \frac{9a^2+6a-2}{2} = 0 .$$

この x に関する 2 次方程式の解が重解になればよい．その条件は，

$$(3a^2+a+1)^2 - (a^2+1)(9a^2+6a-2) = 0 ,$$

$$4a-3=0 ,$$

$$a = \frac{3}{4} .$$

よって、接線 L は方程式 $y = \frac{3}{4}(x-3)+1$ つまり $3x-4y=5$ で表される.

接線 L が x 軸に垂直であるときを考える. 点 $(3,1)$ が L に属するので, L は方程式 $x=3$ で表される. この方程式と円 C を表す方程式 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ とを連立する. $(3-1)^2+(y-2)^2=4$, $(y-2)^2=4$. このときの解も重解である.

故に、接線 L は、方程式 $x=3$ で表される直線あるいは方程式 $3x-4y=5$ で表される直線である.

終