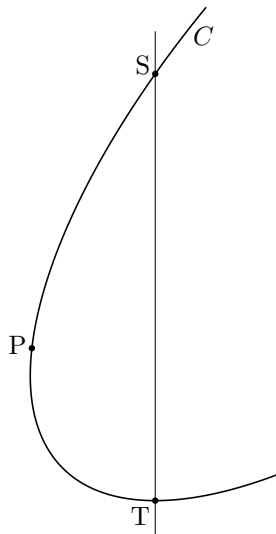


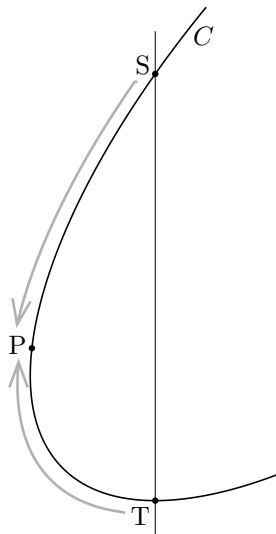
## 7.7

### 2次曲線の接線

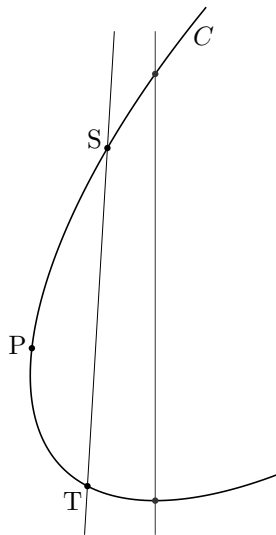
座標平面において，曲線  
 $C$  の中で，定点  $P$  を挟む  
異なる動点  $S$  と  $T$  に対  
して直線  $ST$  を考える．



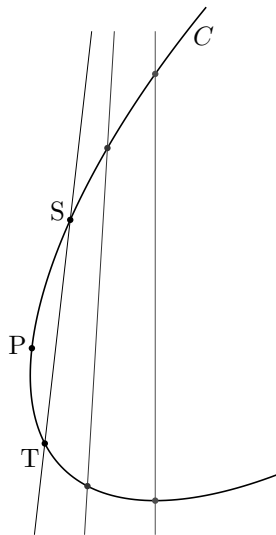
座標平面において，曲線  
 $C$  の中で，定点  $P$  を挟む  
異なる動点  $S$  と  $T$  とを  $P$   
に限りなく近づける．



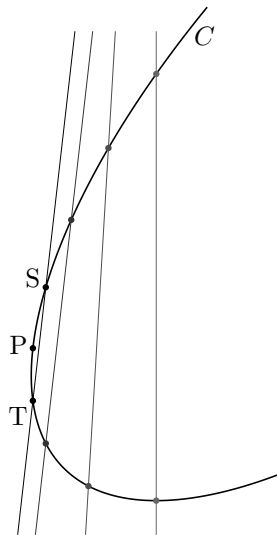
座標平面において，曲線  
 $C$  の中で，定点  $P$  を挟む  
異なる動点  $S$  と  $T$  とを  $P$   
に限りなく近づける．



座標平面において，曲線  
 $C$  の中で，定点  $P$  を挟む  
異なる動点  $S$  と  $T$  とを  $P$   
に限りなく近づける．



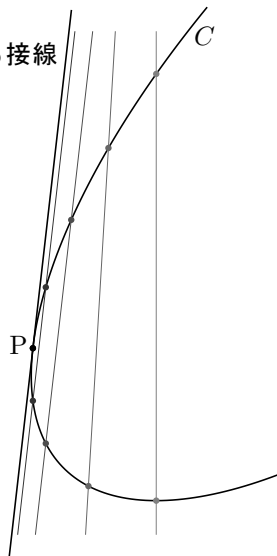
座標平面において，曲線  
 $C$  の中で，定点  $P$  を挟む  
異なる動点  $S$  と  $T$  とを  $P$   
に限りなく近づける．



座標平面において、曲線  $C$  の中で、定点  $P$  を挟む異なる動点  $S$  と  $T$  とを  $P$  に限りなく近づけるとき、直線  $ST$  がある 1 本の直線  $L$  に限りなく近づくなれば、この直線  $L$  を  $C$  の点  $P$  における接線といい、 $P$  を接点という。直線  $L$  が曲線  $C$  の接線であるとき、 $L$  と  $C$  とは接するという。

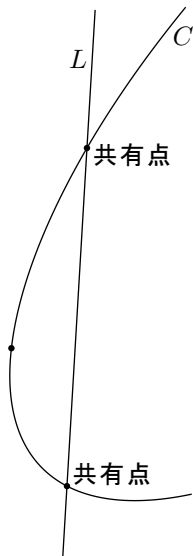
$C$  の点  $P$  における接線

接点  $P$



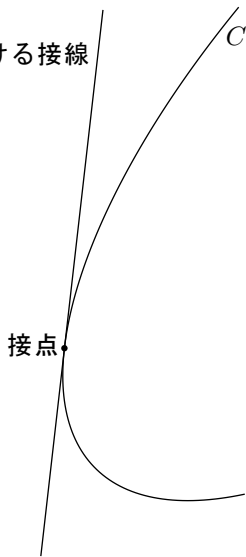
$xy$  座標平面において, 2 次曲線  $C$  は  $x, y$  に関する 2 次方程式で表される. また直線  $L$  は  $x, y$  に関する 1 次方程式で表される. これらの方程式を連立して  $x$  あるいは  $y$  を消去すると, 2 次方程式が導かれるとする.

2次曲線  $C$  を表す2次方程式と直線  $L$  を表す1次方程式との連立方程式の解の対  $(x, y)$  が  $C$  と  $L$  との共有点である. 連立方程式に異なる2対の解があるとき,  $C$  と  $L$  とに異なる2個の共有点がある.



2 次曲線  $C$  を表す 2 次方程式と直線  $L$  を表す 1 次方程式との連立方程式の解の対  $(x, y)$  が  $C$  と  $L$  との共有点である. 連立方程式に異なる 2 対の解があるとき,  $C$  と  $L$  とに異なる 2 個の共有点がある. 連立方程式の解が重なって 1 対だけになるとき, つまり 2 次方程式の解が重解になるとき,  $C$  と  $L$  との共有点が重なって 1 個になる; このときの直線  $L$  が接線になる.

$C$  の点  $P$  における接線



このように考えて次の定理が導かれる.

[定理 7.7]  $xy$  座標平面における 2 次曲線  $C$  と直線  $L$  について,  $L$  が  $C$  の接線であることと,  $C$  を表す 2 次方程式と  $L$  を表す 1 次方程式とから導かれる 2 次方程式の解が重解であることは同値である.

$xy$  座標平面において、 $x$  軸に垂直な直線は  $x = a$  ( $a, b$  は定数) の形の方程式では表される。 $x$  軸に垂直でない直線は、傾きがあるので、 $y = ax + b$  ( $a, b$  は定数) の形の方程式で表される。

**例**  $xy$  座標平面において方程式  $4x = y^2$  が表す放物線  $P$  の点  $(9, 6)$  における接線  $L$  を表す方程式を求める.  $x$  軸に垂直で点  $(9, 6)$  が属す直線を表す方程式  $x = 9$  と方程式  $4x = y^2$  とから導かれる 2 次方程式  $y^2 = 36$  の解は重解でないので, 方程式  $x = 9$  が表す直線は  $P$  の接線ではない. よって直線  $L$  は  $x$  軸に垂直ではないので,  $L$  の傾き  $m$  がある.  $(9, 6) \in L$  なので,  $L$  は方程式  $y = m(x - 9) + 6$  で表される. これと方程式  $4x = y^2$  とを連立すると,  $4x = \{m(x - 9) + 6\}^2$ ,  $m^2(x - 9)^2 + 12m(x - 9) - 4x + 36 = 0$ , この  $x$  に関する方程式の解の一つは  $9$  なので, 因数定理により左辺は  $x - 9$  を因数として因数分解できる;  $(x - 9)\{m^2(x - 9) + 12m - 4\} = 0$ ,  $x = 9$  または  $x = -\frac{12m - 4}{m^2} + 9$ ; 定理 7.7 によりこれらの解が重解なので,  $-\frac{12m - 4}{m^2} + 9 = 9$ ,  $12m - 4 = 0$ ,  $m = \frac{1}{3}$ . 接線  $L$  の傾きは  $\frac{1}{3}$  なので,  $L$  は方程式  $y = \frac{1}{3}(x - 9) + 6$  つまり  $y = \frac{1}{3}x + 3$  で表される.

終

**問7.7.1**  $xy$  座標平面において方程式  $2x = y^2$  が表す放物線  $P$  の点  $(8, 4)$  における接線  $L$  を表す方程式を求めよ.

$x$  軸に垂直で点  $(8, 4)$  が属す直線を表す方程式  $x = 8$  と方程式  $2x = y^2$  とから導かれる方程式  $y^2 = 16$  の解は重解ではないので, 方程式  $x = 8$  が表す直線は  $P$  の接線ではない. よって直線  $L$  は  $x$  軸に垂直ではないので, 直線  $L$  の傾き  $m$  がある.  $(8, 4) \in L$  なので,  $L$  は方程式  $y = m(x - 8) + 4$  で表される. これと方程式  $2x = y^2$  との連立方程式を考える.  $2x = \{m(x - 8) + 4\}^2$ ,  $m^2(x - 8)^2 + 8m(x - 8) - 2x + 16 = 0$ ,  $(x - 8)\{m^2(x - 8) + 8m - 2\} = 0$ ,  $x = 8$  または  $x = -\frac{8m - 2}{m^2} + 8$ ; これらの解が重解なので,  $-\frac{8m - 2}{m^2} + 8 = 8$ ,  $8m - 2 = 0$ ,  $m = \frac{1}{4}$ . 接線  $L$  の傾きは  $\frac{1}{4}$  であり,  $P$  の接線  $L$  は方程式  $y = \frac{1}{4}(x - 8) + 4$  つまり  $y = \frac{1}{4}x + 2$  で表される.

終

例  $xy$  座標平面において方程式  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$  が表す楕円  $E$  の点  $(3, 2)$  における接線  $L$  を表す方程式を求める.  $x$  軸に垂直で点  $(3, 2)$  が属す直線を表す方程式  $x = 3$  と方程式  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$  とから導かれる 2 次方程式  $\frac{9}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$  の解は重解でないので, 方程式  $x = 3$  が表す直線は  $E$  の接線ではない. よって直線  $L$  は  $x$  軸に垂直ではないので,  $L$  は方程式  $y = m(x - 3) + 2$  で表される. これと方程式  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$  とを連立すると,

$$\frac{x^2}{12} + \frac{\{m(x - 3) + 2\}^2}{16} = 1 ,$$

$$4x^2 + 3\{m(x - 3) + 2\}^2 = 48 ,$$

$$3m^2(x - 3)^2 + 12m(x - 3) + 4x^2 - 36 = 0 ,$$

$$3(x - 3)^2m^2 + 12m(x - 3) + 4(x + 3)(x - 3) = 0 ,$$

$$(x - 3)\{3(x - 3)m + 12m + 4(x + 3)\} = 0 ,$$

$$(x-3)\{3(x-3)m+12m+4(x+3)\}=0 ,$$

$$(x-3)\{(3m^2+4)x-9m^2+12m+12\}=0 ,$$

$$x=3 \text{ または } x=\frac{9m^2+12m+12}{3m^2+4} .$$

これらの解が重解なので,

$$\frac{9m^2-12m-12}{3m^2+4}=3 ,$$

$$9m^2-12m-12=9m^2+12 ,$$

$$12m=-24 ,$$

$$m=-2 .$$

このとき, 解  $(x,y)=(3,2)$  は重解である. 接線  $L$  の傾きは  $-2$  であり,  $L$  は方程式  $y=-2(x-3)+2$  つまり  $y=-2x+8$  で表される. 終

**問7.7.2**  $xy$  座標平面において方程式  $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$  が表す双曲線  $H$  の点  $(4,1)$  における接線  $L$  を表す方程式を求めよ.

$x$  軸に垂直で点  $(4,1)$  が属す直線を表す方程式  $x = 4$  と方程式  $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$  との連立方程式の解は重解でないので, 方程式  $x = 4$  が表す直線は  $H$  の接線でない. よって接線  $L$  の傾き  $m$  がある.  $L$  は方程式  $y = m(x - 4) + 1$  で表される. これと方程式  $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$  とより,

$$\frac{x^2}{8} - \{m(x - 4) + 1\}^2 = 1, \quad x^2 - 8\{m^2(x - 4)^2 + 2m(x - 4) + 1\} - 8 = 0$$

; この  $x$  に関する方程式の解の一つは  $4$  なので, 左辺は  $x - 4$  を因数とする;

$$8m^2(x - 4)^2 - 16m(x - 4) - (x + 4)(x - 4) = 0, \quad (x - 4)\{8(x - 4)m^2 - 16m - x - 4\} = 0,$$
$$(x - 4)\{(8m^2 - 1)x - 32m^2 - 16m - 4\} = 0, \quad x = 4 \text{ または } x = \frac{32m^2 - 16m + 4}{8m^2 - 1}$$

; これらの解が重解なので,  $\frac{32m^2 - 16m + 4}{8m^2 - 1} = 4$ ,

$32m^2 - 16m + 4 = 32m^2 - 4$  ,  $16m = 8$  ,  $m = \frac{1}{2}$  . このとき, 解  $(x, y) = (4, 1)$  は重解である. 接線  $L$  の傾きは  $\frac{1}{2}$  であり,  $L$  は方程式  $y = \frac{1}{2}(x - 4) + 1$  つまり  $y = \frac{1}{2}x - 1$  で表される. □終

**例**  $xy$  座標平面において方程式  $15x = y^2$  が表す放物線  $P$  の接線  $L$  の一つ  
の方向ベクトルが  $(2,3)$  であるとする.  $P$  と  $L$  との接点を求める. ベクトル  
 $(2,3)$  が直線  $L$  の方向ベクトルなので, ある定数  $c$  をとると,  $L$  は方程  
式  $3x - 2y = c$  で表される. この方程式より  $x = \frac{2y+c}{3}$ , 方程式  $15x = y^2$   
より  $15 \cdot \frac{2y+c}{3} = y^2$ ,  $10y + 5c = y^2$ ,  $y^2 - 10y = 5c$ ,  $(y-5)^2 = 5c + 25$ .  
 $y$  に関するこの方程式の解が重解である条件は  $5c + 25 = 0$  つまり  $c = -5$   
であり, このとき  $y = 5$ . このとき  $x = \frac{2y+c}{3} = \frac{5}{3}$ .  $P$  と  $L$  との接点は  
 $\left(\frac{5}{3}, 5\right)$  である.

**終**

**問7.7.3**  $xy$  座標平面において方程式  $16x = y^2$  が表す放物線  $P$  の接線  $L$  の一つの方向ベクトルが  $(3,4)$  であるとする.  $P$  と  $L$  との接点を求めよ.

ベクトル  $(3,4)$  が直線  $L$  の方向ベクトルなので, ある定数  $c$  をとると,  $L$  は方程式  $4x - 3y = c$  で表される. この方程式より  $x = \frac{3y+c}{4}$ , 方程式  $16x = y^2$  より  $16 \cdot \frac{3y+c}{4} = y^2$ ,  $12y + 4c = y^2$ ,  $y^2 - 12y = 4c$ ,  $(y-6)^2 = 4c + 36$ .  $y$  に関するこの方程式の解が重解である条件は  $4c + 36 = 0$  つまり  $c = -9$ ; このとき,  $y = 6$ .  $x = \frac{3y+c}{4} = \frac{9}{4}$ .  $P$  と  $L$  との接点は  $\left(\frac{9}{4}, 6\right)$  である. 終

例  $xy$  座標平面において方程式  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$  が表す双曲線  $H$  の接線  $L$  の一つ  
 の方向ベクトルが  $(2, 3)$  であるとする.  $H$  と  $L$  との接点を求める. 直線  $L$   
 の一つ方向ベクトルが  $(2, 3)$  なので,  $L$  は方程式  $3x - 2y = c$  で表される.  
 この方程式より  $y = \frac{3x - c}{2}$ , 方程式  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$  より  $x^2 - \frac{(3x - c)^2}{8} = 1$ ,  
 $x^2 - 6cx + c^2 + 8 = 0$ ,  $x^2 - 6cx + 9c^2 - c^2 = 8c^2 - 8$ ,  $(x - 3c)^2 = 8c^2 - 8$ .  $x$   
 に関するこの方程式の解が重解である条件は  $8c^2 - 8 = 0$  つまり  $c = \pm 1$ ; こ  
 のとき,  $x = 3c = \pm 3$ ,  $y = \frac{3x - c}{2} = 4c = \pm 4$ .  $H$  と  $L$  との接点は,  $(3, 4)$   
 であるかまたは  $(-3, -4)$  である.

終

**問7.7.4**  $xy$  座標平面において方程式  $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$  が表す楕円  $E$  の接線  $L$  の一つの方法ベクトルが  $(1, 2)$  であるとする.  $E$  と  $L$  との接点を求めよ.

直線  $L$  の一つの方法ベクトルが  $(1, 2)$  なので,  $L$  は方程式  $2x - y = c$  で表される. この方程式より  $y = 2x - c$ , 方程式  $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$  より  $x^2 + \frac{(2x - c)^2}{3} = 1$ ,  $7x^2 - 4cx + c^2 - 3 = 0$ ,  $x^2 - \frac{4c}{7}x + \frac{c^2 - 3}{7} = 0$ ,  $x^2 - \frac{4c}{7}x + \left(\frac{2c}{7}\right)^2 - \frac{4c^2}{49} + \frac{c^2 - 3}{7} = 0$ ,  $\left(x - \frac{2c}{7}\right)^2 = \frac{3c^2 - 21}{49}$ .  $x$  に関するこの方程式の解が重解である条件は  $3c^2 - 21 = 0$  つまり  $c = \pm\sqrt{7}$  であり, このとき  $x = \frac{2c}{7} = \pm\frac{2}{7}\sqrt{7}$ . 更に  $y = 2x - c = 2 \cdot \frac{2c}{7} - c = -\frac{3c}{7} = \mp\frac{3}{7}\sqrt{7}$ .  $E$  と  $L$  との接点は,  $\left(\frac{2}{7}\sqrt{7}, -\frac{3}{7}\sqrt{7}\right)$  であるかまたは  $\left(-\frac{2}{7}\sqrt{7}, \frac{3}{7}\sqrt{7}\right)$  である. **終**