

7.6

2次曲線と直線との共有点

xy 座標平面において、2 次曲線 C は x と y とに関する 2 次方程式で表され、直線 L は x と y とに関する 1 次方程式で表される． C と L との共有点は、 C を表す 2 次方程式と L を表す 1 次方程式との連立方程式の実数解における x の値と y の値との対である．

例 xy 座標平面において方程式 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ が表す双曲線と方程式 $x + 2y = 4$ が表す直線との共有点を求める．方程式 $x + 2y = 4$ より $x = 4 - 2y$, これを方程式 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ に代入すると

$$\frac{(4 - 2y)^2}{2} - y^2 = 1 ,$$

$$y^2 - 8y + 7 = 0 ,$$

$$(y - 1)(y - 7) = 0 ,$$

よって $y = 1$ または $y = 7$. $x = 4 - 2y$ なので, $y = 1$ のとき $x = 2$, $y = 7$ のとき $x = -10$. 共有点は $(2, 1)$ と $(-10, 7)$ とである.

終

問7.6.1 xy 座標平面において方程式 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ が表す 楕円と方程式 $x + 2y = 2$ が表す直線との共有点を求めよ.

方程式 $x + 2y = 2$ より $x = 2 - 2y$, これを方程式 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ に代入すると

$$\frac{(2 - 2y)^2}{2} + y^2 = 1 ,$$
$$3y^2 - 4y + 1 ,$$

$$(y - 1)(3y - 1) = 0 ,$$

よって $y = 1$ または $y = \frac{1}{3}$. $x = 2 - 2y$ なので, $y = 1$ のとき $x = 0$,
 $y = \frac{1}{3}$ のとき $x = \frac{4}{3}$. 共有点は $(0, 1)$ と $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ とである.

終

xy 座標平面において、2 次曲線 C は x と y に関する 2 次方程式で表され、直線 L は x と y に関する 1 次方程式で表される。

- ・ C と L との共有点があることと、 C を表す 2 次方程式と L を表す 1 次方程式との連立方程式の実数解があることとは同値である。

- ・ C と L とに異なる 2 個の共有点があることと、 C を表す 2 次方程式と L を表す 1 次方程式との連立方程式に異なる 2 個の実数解があることとは同値である。

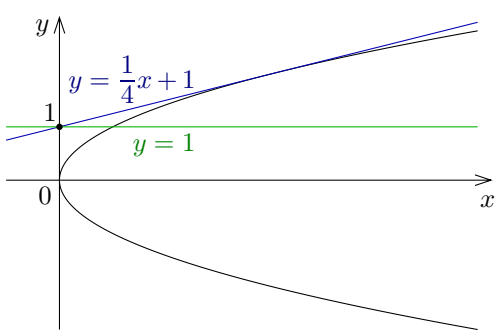
- ・ C と L との共有点が無いことと、 C を表す 2 次方程式と L を表す 1 次方程式との連立方程式の実数解が無いこととは同値である。

例 変数 m について, xy 座標平面において方程式 $x = y^2$ が表す放物線と方程式 $y = mx + 1$ が表す直線とに異なる 2 個の共有点があることと同値でなるべく簡単な条件を求める. 方程式 $x = y^2$ と $y = mx + 1$ とより, $x = (mx + 1)^2$, $m^2x^2 + (2m - 1)x + 1 = 0$. この x に関する方程式に異なる 2 個の共有点がある条件は,

$$m^2 \neq 0 \text{ かつ } (2m - 1)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot 1 > 0,$$

$$m \neq 0 \text{ かつ } 1 - 4m > 0,$$

故に $m < \frac{1}{4}$ かつ $m \neq 0$.



問7.6.2 変数 m について, xy 座標平面において方程式 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ が表す双曲線と方程式 $y = mx + 3$ が表す直線とに異なる 2 個の共有点があることと同値となるべく簡単な条件を求めよ.

方程式 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ と $y = mx + 3$ とより,

$$x^2 - \frac{(mx + 3)^2}{4} = 1, \quad (4 - m^2)x^2 - 6mx - 13 = 0.$$
この x に関する方程式に異なる 2 個の共有点がある条件は, $4 - m^2 \neq 0$ かつ $(6m)^2 + 52(9 - m^2) > 0$, $m^2 \neq 4$ かつ $m^2 - 13 < 0$, $-\sqrt{13} < m < \sqrt{13}$ かつ $m \neq 2$ かつ $m \neq -2$.

