

7.5

双曲線

座標平面 $\mathbf{R}^2$ において 2 点 A と B について $\overline{AB} = 5$ とする．右図において， $\mathbf{R}^2$ の点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_8$ は次のような点とする：

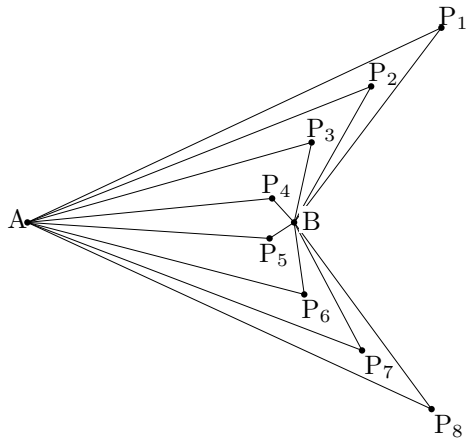
$$\overline{AP_1} - \overline{BP_1} = 4 ,$$

$$\overline{AP_2} - \overline{BP_2} = 4 ,$$

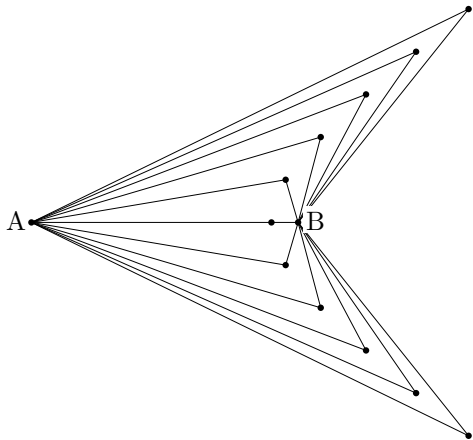
$$\overline{AP_3} - \overline{BP_3} = 4 ,$$

$$\vdots$$

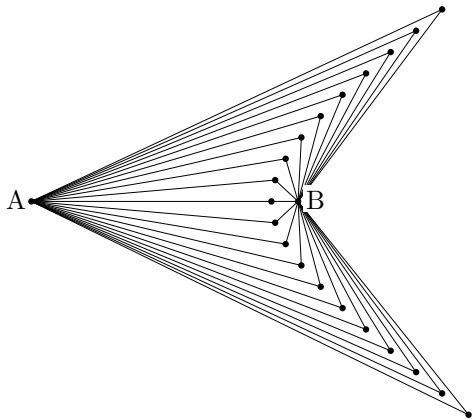
$$\overline{AP_8} - \overline{BP_8} = 4 .$$



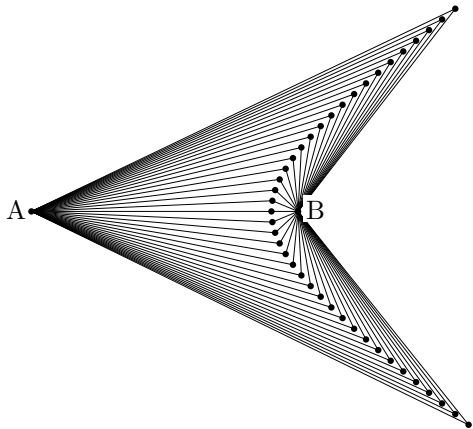
$\overline{AB} = 5$ である点 A
 と B とに対して、
 $\overline{AP} - \overline{BP} = 4$ である
 点 P を多数とると右
 図のようになる。



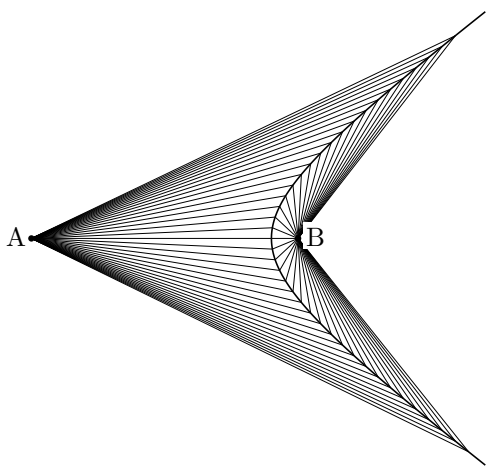
$\overline{AB} = 5$ である点 A
と B とに対して、
 $\overline{AP} - \overline{BP} = 4$ である
点 P を多数とると右
図のようになる。



$\overline{AB} = 5$ である点 A
と B とに対して、
 $\overline{AP} - \overline{BP} = 4$ である
点 P を多数とると右
図のようになる。



$\overline{AB} = 5$ である点 A
と B とに対して,
 $\overline{AP} - \overline{BP} = 4$ である
点 P を集めると右図
のような曲線になる.



座標平面 $\mathbf{R}^2$ において 2 点 A と B について $\overline{AB} = 5$ とする．右図において， $\mathbf{R}^2$ の点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_8$ は次のような点とする：

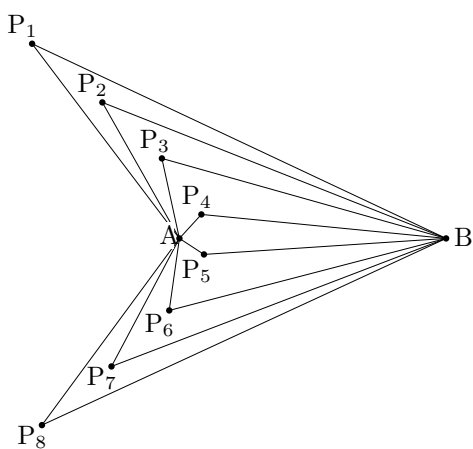
$$\overline{BP_1} - \overline{AP_1} = 4 ,$$

$$\overline{BP_2} - \overline{AP_2} = 4 ,$$

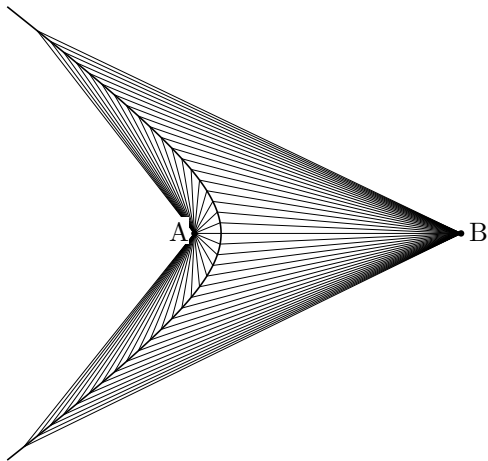
$$\overline{BP_3} - \overline{AP_3} = 4 ,$$

$$\vdots$$

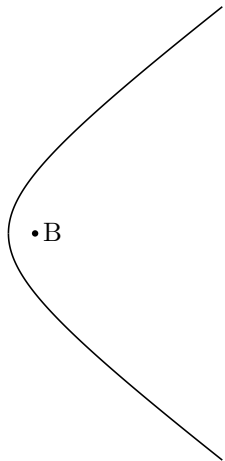
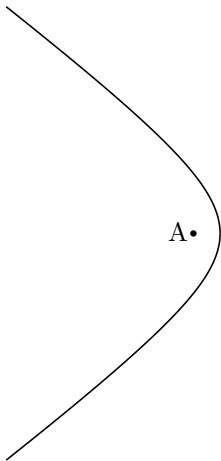
$$\overline{BP_8} - \overline{AP_8} = 4 .$$



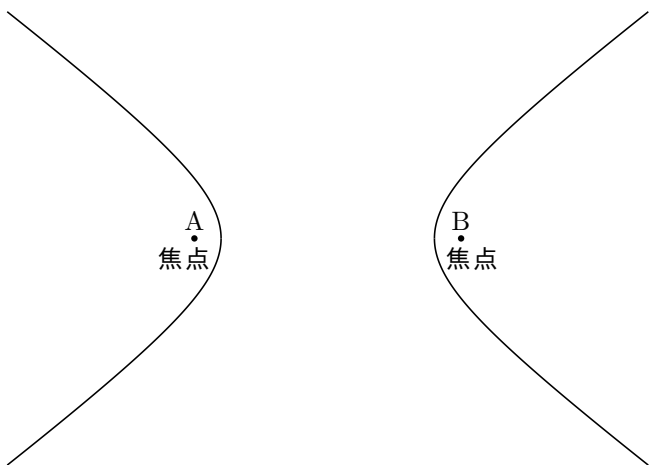
$\overline{AB} = 5$ である点 A
と B とに対して,
 $\overline{AP} - \overline{BP} = 4$ である
点 P を集めると右図
のような曲線になる.



$\overline{AB} = 5$ である点
A と B とに対し
て, $\overline{AP} - \overline{BP} = 4$
である点 P と
 $\overline{BP} - \overline{AP} = 4$ である
点 P とを集めると右
図のような 2 本の曲
線になる.



$\overline{AB} = 5$ である点
A と B とに対し
て, $\overline{AP} - \overline{BP} = 4$
である点 P と
 $\overline{BP} - \overline{AP} = 4$ である
点 P とを集めると右
図のような 2 本の曲
線になる. このよう
な 2 本で 1 組の曲線
を双曲線といい, 点
A と B とを焦点と
いう.

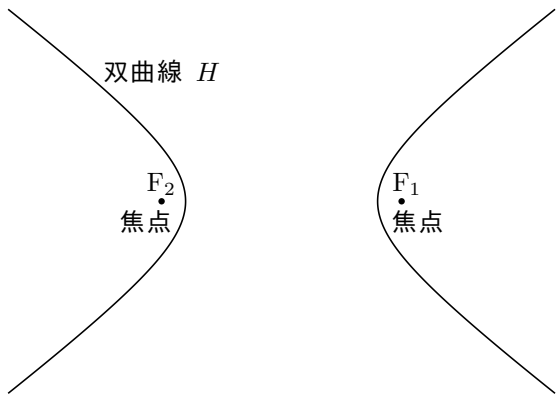


[定義] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において, 定点 F_1 と F_2 と定数 k について $0 < k < \overline{F_1F_2}$ であるとき, $|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = k$ である点 P の全体

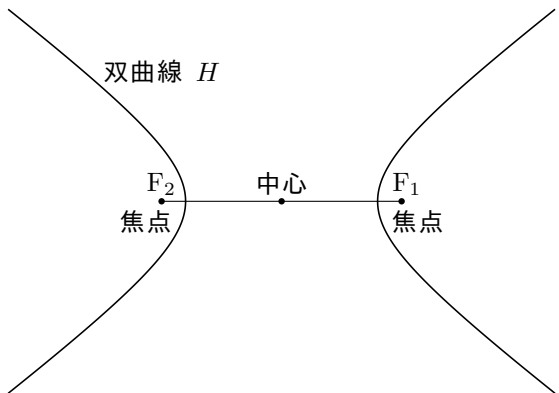
$$\{ P \in \mathbf{R}^2 \mid |\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = k \}$$

を双曲線といい, 点 F_1 と F_2 とを焦点という.

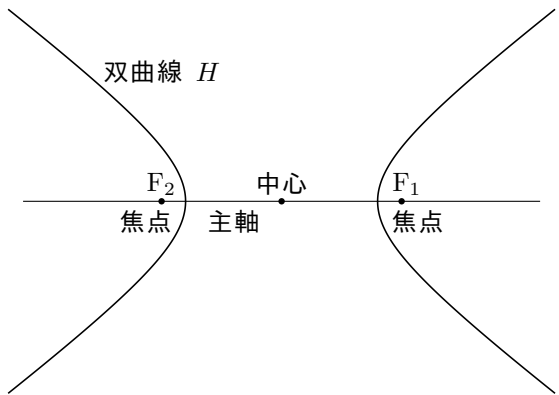
座標平面 $\mathbf{R}^2$ において点 F_1 と F_2 とを焦点とする双曲線 H を考える.



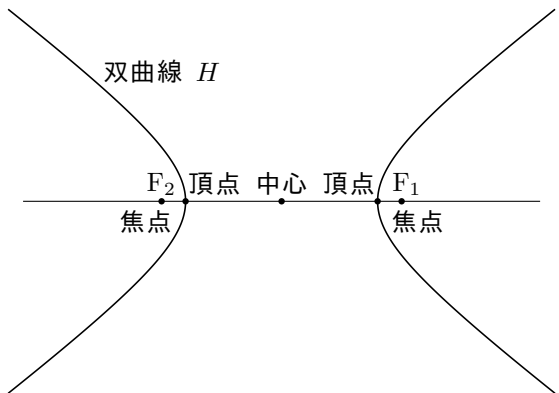
双曲線 H の焦点 F_1 と F_2 とを結ぶ線分 F_1F_2 の中点を H の中心という. 双曲線 H の焦点 F_1 と F_2 とを結ぶ線分 F_1F_2 の垂直二等分線について対称である.



双曲線 H の 2 個の焦点
 F_1 と F_2 とが属す直線を H
の主軸という. H は主軸に
ついて対称である.



双曲線 H の主軸と H との
共有点を頂点という.

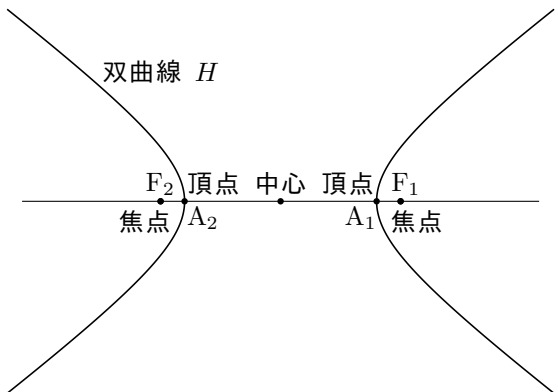


双曲線 H の 2 個の頂点をそれぞれ A_1, A_2 とおく. 双曲線 H に属す各点 P について

$$\begin{aligned} |\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| &= |\overline{F_1A_2} - \overline{F_2A_2}| \\ &= |\overline{F_1A_2} - \overline{F_1A_1}| \\ &= \overline{A_2A_1} . \end{aligned}$$

双曲線 H は $|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = \overline{A_1A_2}$ である点 P の全体である :

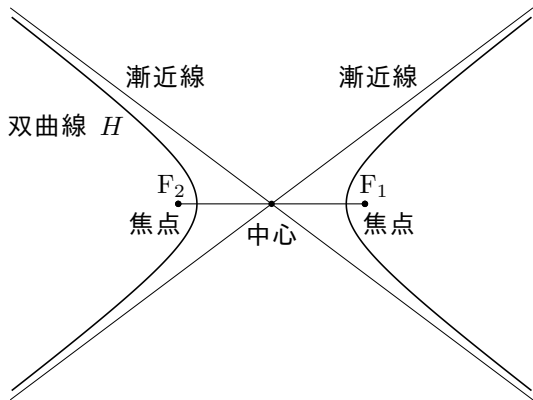
$$H = \{ P \in \mathbf{R}^2 \mid |\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = \overline{A_1A_2} \} .$$



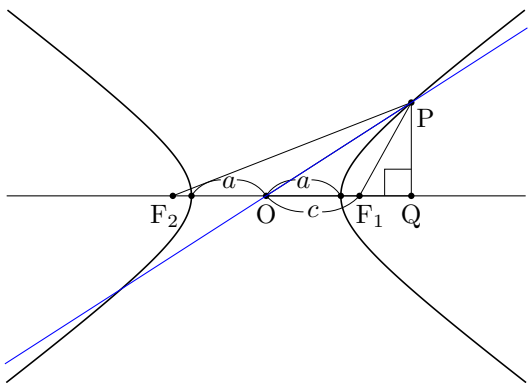
[定理 7.5.1] 座標平面において，点 F_1 と F_2 とを焦点とする双曲線 H の 2 個の頂点の間隔が k であるとき，各点 P について

$$P \in H \Leftrightarrow |\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = k .$$

双曲線 H を伸ばしていくとある直線に限りなく近づいていく；この直線を双曲線 H の漸近線という．双曲線 H の漸近線は 2 本あり，それらの共有点は H の中心である．



異なる2点 F_1 と F_2 とを
 焦点とする双曲線 H につい
 て、中心を O とおき、 O と頂
 点との間隔を a とおき O と
 焦点との間隔を c とおく． H
 に属す点 P について、定理
 7.5.1 により $\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = \pm 2a$ ．
 $\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = -2a$ のときを考え
 る． P から H の主軸に下した
 垂線の足を Q とおく．



$$\overline{F_1P}^2 = \overline{F_1Q}^2 + \overline{PQ}^2 = (\overline{OQ} - c)^2 + \overline{PQ}^2 ,$$

$$\overline{F_2P}^2 = \overline{F_2Q}^2 + \overline{PQ}^2 = (\overline{OQ} + c)^2 + \overline{PQ}^2 ,$$

$$\begin{aligned} \overline{F_1P}^2 - \overline{F_2P}^2 &= (\overline{OQ} - c)^2 + \overline{PQ}^2 - (\overline{OQ} + c)^2 - \overline{PQ}^2 = 2\overline{OQ} \cdot (-2c) \\ &= -4c\overline{OQ} . \end{aligned}$$

$$\overline{F_1P}^2 - \overline{F_2P}^2 = -4c\overline{OQ} ,$$

$$(\overline{F_1P} - \overline{F_2P})(\overline{F_1P} + \overline{F_2P}) = -4c\overline{OQ} .$$

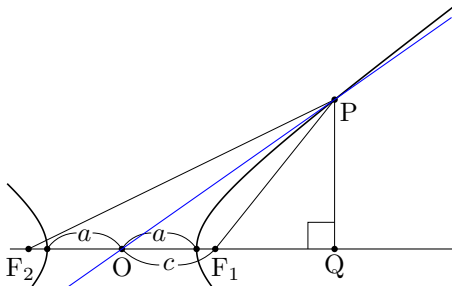
$\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = -2a$ のときを考える
ので,

$$-2a(\overline{F_1P} + \overline{F_2P}) = -4c\overline{OQ} ,$$

$$\overline{OQ} = \frac{a}{2c} (\overline{F_1P} + \overline{F_2P}) .$$

角度 $\angle POQ$ の余弦を考える.

$$\cos \angle POQ = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{a}{2c} \frac{\overline{F_1P} + \overline{F_2P}}{\overline{OP}} = \frac{a}{2c} \left(\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}} \right) .$$

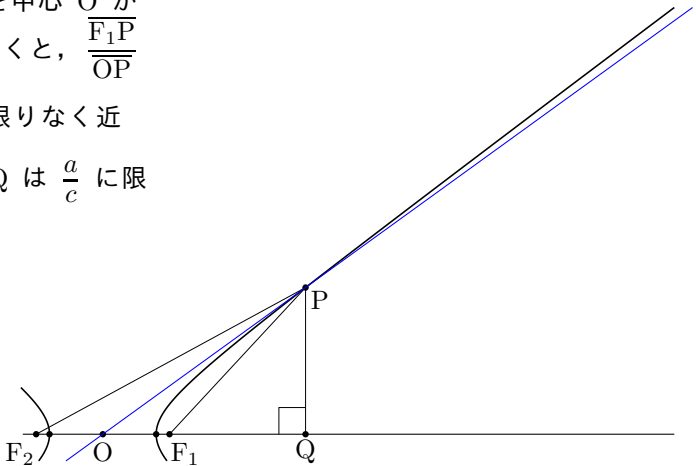


$$\cos \angle POQ = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{a}{2c} \left(\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}} \right).$$

双曲線 E の点 P を中心 O から限りなく離していくと, $\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}}$

と $\frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}}$ とは 1 に限りなく近

づくので, $\cos \angle POQ$ は $\frac{a}{c}$ に限りなく近づく.

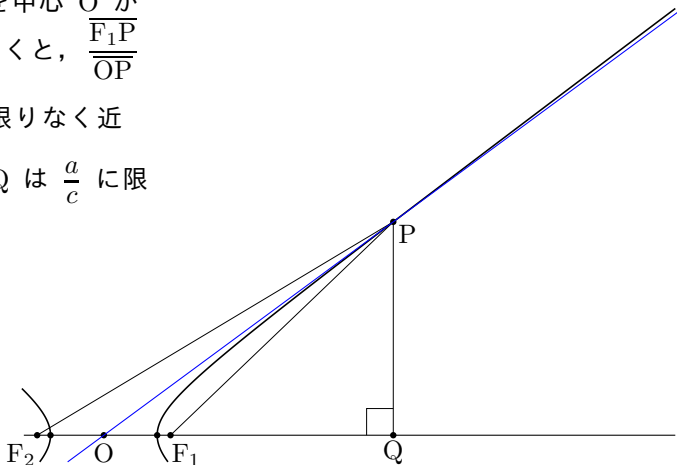


$$\cos \angle POQ = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{a}{2c} \left(\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}} \right) .$$

双曲線 E の点 P を中心 O から限りなく離していくと, $\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}}$

と $\frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}}$ とは 1 に限りなく近

づくので, $\cos \angle POQ$ は $\frac{a}{c}$ に限りなく近づく.

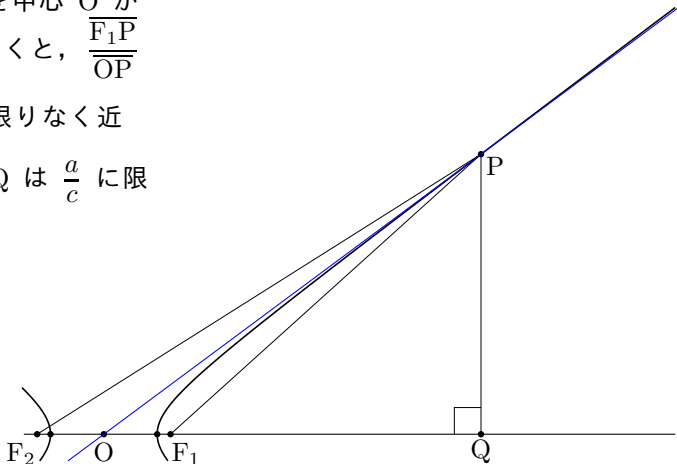


$$\cos \angle POQ = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{a}{2c} \left(\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}} \right).$$

双曲線 E の点 P を中心 O から限りなく離していくと, $\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}}$

と $\frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}}$ とは 1 に限りなく近

づくので, $\cos \angle POQ$ は $\frac{a}{c}$ に限りなく近づく.

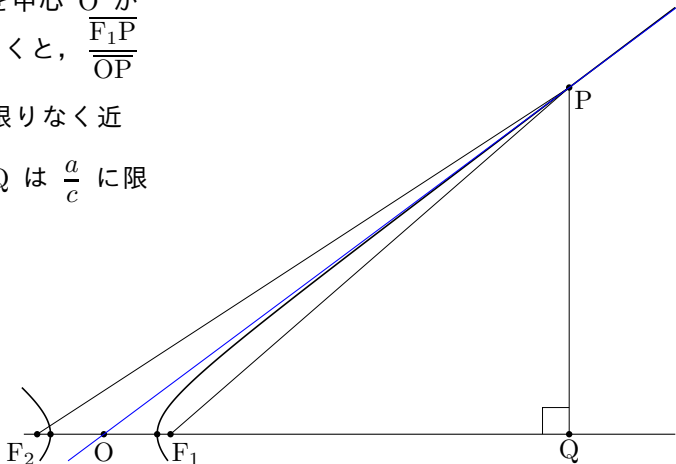


$$\cos \angle POQ = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{a}{2c} \left(\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}} \right).$$

双曲線 E の点 P を中心 O から限りなく離していくと, $\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}}$

と $\frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}}$ とは 1 に限りなく近

づくので, $\cos \angle POQ$ は $\frac{a}{c}$ に限りなく近づく.

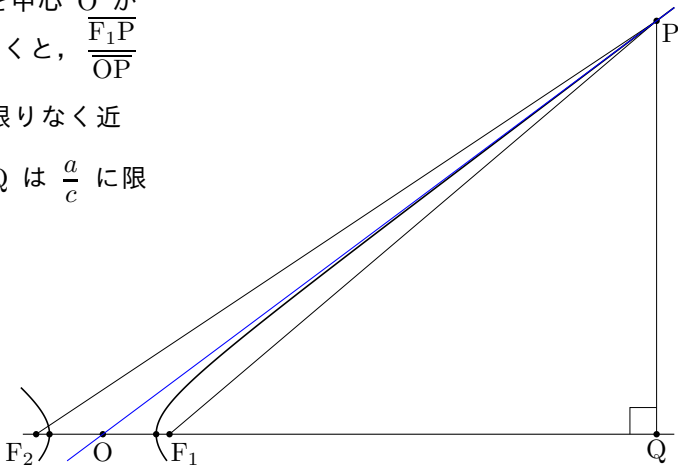


$$\cos \angle POQ = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{a}{2c} \left(\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}} \right) .$$

双曲線 E の点 P を中心 O から限りなく離していくと, $\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}}$

と $\frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}}$ とは 1 に限りなく近

づくので, $\cos \angle POQ$ は $\frac{a}{c}$ に限りなく近づく.



$$\cos \angle POQ = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{a}{2c} \left(\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}} \right).$$

双曲線 E の点 P を中心 O から限りなく離していくと, $\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}}$

と $\frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}}$ とは 1 に限りなく近

づくので, $\cos \angle POQ$ は $\frac{a}{c}$ に限

りなく近づく. P を中心 O から

限りなく離していくとき直線

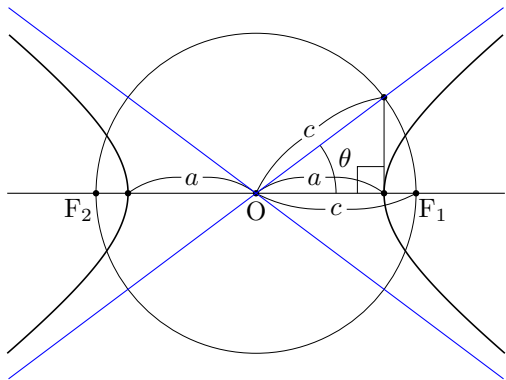
OP が限りなく近づいていく直

線が双曲線 E の漸近線である.

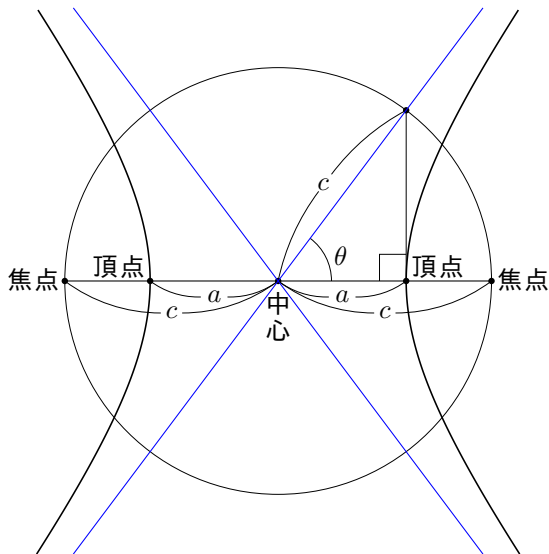


$$\cos \angle POQ = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{a}{2c} \left(\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}} \right).$$

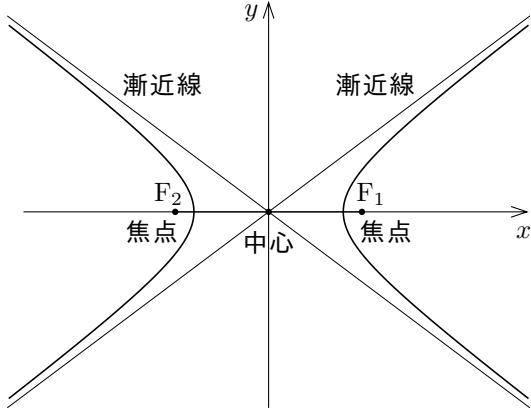
双曲線 E の点 P を中心 O から限りなく離していくと、 $\frac{\overline{F_1P}}{\overline{OP}}$ と $\frac{\overline{F_2P}}{\overline{OP}}$ とは 1 に限りなく近づくので、 $\cos \angle POQ$ は $\frac{a}{c}$ に限りなく近づく． P を中心 O から限りなく離していくとき直線 OP が限りなく近づいていく直線が双曲線 E の漸近線である．漸近線と主軸との間の角度 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) について $\cos \theta = \frac{a}{c}$. 上図のようになる.



[定理 7.5.2] 双曲線において、
中心と頂点との間の距離を
 a とおき、中心と焦点との
間の距離を c とおくとき、
主軸と漸近線との間の角度
 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) について
 $\cos \theta = \frac{a}{c}$.

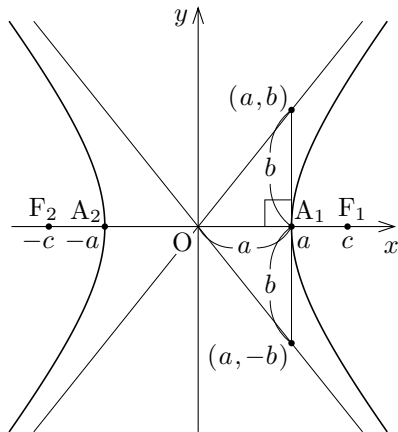


xy 座標平面において双曲線 H を考えるときは、標準では、 H の焦点 F_1 と F_2 とが x 軸に属し、 H の中心が原点 $(0,0)$ であるようにする．このような双曲線を表す方程式を導く．



[定理 7.5.3] 0 でない定数 a, b について, xy 座標平面における双曲線 H の頂点が $(a, 0)$ と $(-a, 0)$ とでありかつ点 (a, b) が H の漸近線に属するとき, H は方程式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ で表される.

[証明] 定数 a, b が正のときを扱う. xy 座標平面における双曲線 H について, H の頂点は $A_1 = (a, 0)$ と $A_2 = (-a, 0)$ とであり, 点 (a, b) が H の漸近線に属とする. H の中心は, 点 $A_1 = (a, 0)$ と $A_2 = (-a, 0)$ との中点なので, 原点 $O = (0, 0)$ である. H について, 両方の頂点が x 軸に属するので, 両方の焦点も x 軸に属す. ある正の定数 c をとると, $c > a$ で, H の焦点は $F_1 = (c, 0)$ と $F_2 = (-c, 0)$ とである.



双曲線 H に属す各点 $P = (x, y)$ について、 $|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}|$ は頂点の間隔 $2a$ なので、

$$\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = \pm 2a ,$$

$$\overline{F_2P} = \overline{F_1P} \pm 2a ,$$

$$\overline{F_2P}^2 = (\overline{F_1P} \pm 2a)^2 = 4a^2 \pm 4a\overline{F_1P} + \overline{F_1P}^2 ,$$

ここで

$$\overline{F_1P}^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 ,$$

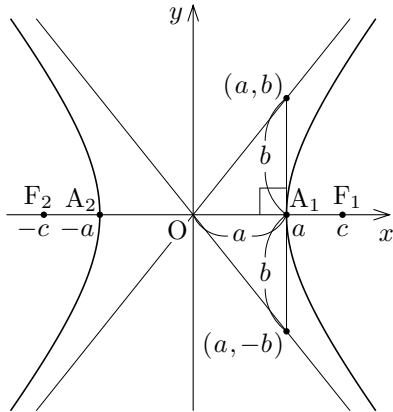
$$\overline{F_2P}^2 = (x + c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 ,$$

よって

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\overline{F_1P} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 ,$$

$$\pm 4a\overline{F_1P} = 4cx - 4a^2 ,$$

$$\pm \overline{F_1P} = \frac{c}{a}x - a ,$$



$$\pm \overline{F_1P} = \frac{c}{a}x - a ,$$

$$\overline{F_1P}^2 = \left(\frac{c}{a}x - a \right)^2 ,$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2xc + a^2 ,$$

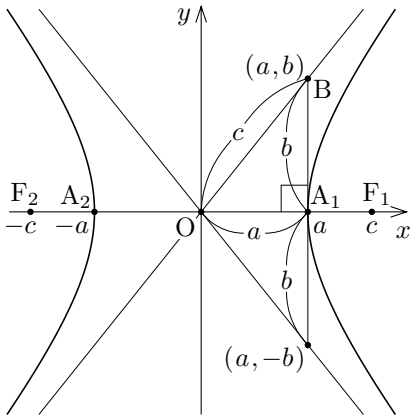
$$\frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2 ,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 .$$

原点 $O = (0,0)$ と点 $A_1 = (a,0)$ と点 $B = (a,b)$ とを頂点とする直角三角形

を考えると, $\cos \angle A_1OB = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB}} = \frac{a}{c}$

で $\overline{OA_1} = a$ なので $\overline{OB} = c$, ピタゴラスの定理により $a^2 + b^2 = c^2$,
 $c^2 - a^2 = b^2$. よって $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

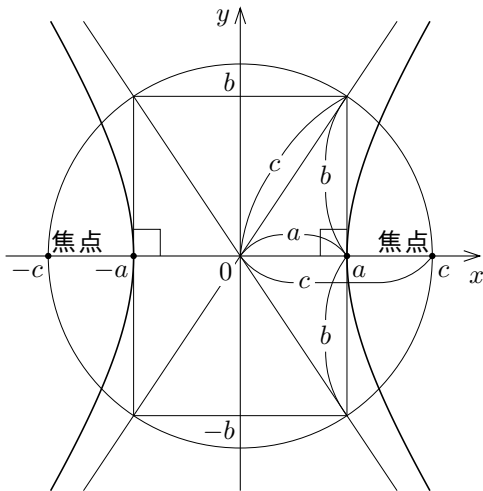


こうして次のことが示された：点 (x, y) が双曲線 H に属すならば $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. 証明は省くが，逆に $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ならば 点 (x, y) が双曲線 H に属す. 故に双曲線 H は方程式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ で表される. 証明終了

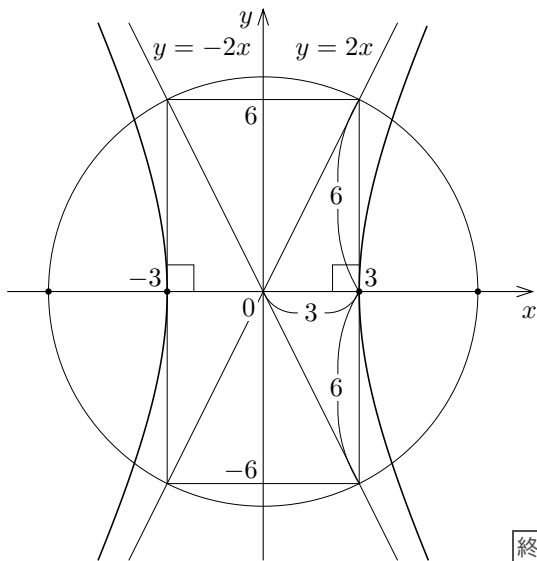
0 でない定数 a, b に対して, xy 座標平面において双曲線を表す方程式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を標準形という.

次の定理の証明は省く.

[定理 7.5.4] 正の定数 a, b について, xy 座標平面において方程式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ が表す図形 H は双曲線であり, H の主軸は x 軸であり, H の中心は原点 $(0,0)$ であり, $c^2 = a^2 + b^2$ である定数 c に対して H の焦点は $(c,0)$ と $(-c,0)$ とであり, H の頂点は $(a,0)$ と $(-a,0)$ とであり, H の漸近線は方程式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ で表される直線と方程式 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ で表される直線とである.



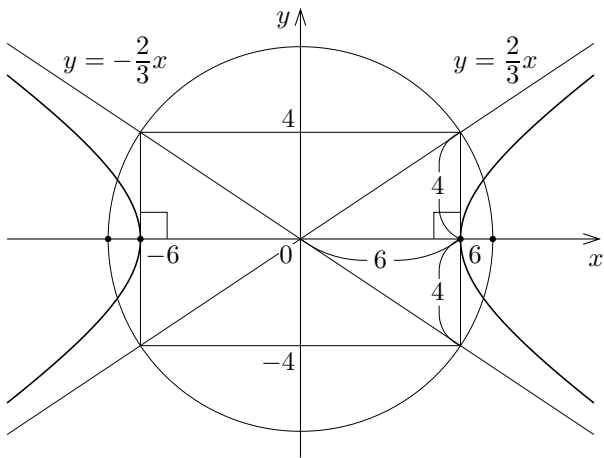
例 xy 座標平面における双曲線 H について、頂点は $(3,0)$ と $(-3,0)$ とであり、漸近線は方程式 $y = 2x$ が表す直線と方程式 $y = -2x$ が表す直線とであるとする。 H を表す方程式を求める。
 実数 b について点 $(3,b)$ が H の漸近線に属するとき $b = \pm 6$. 双曲線 H は方程式 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ で表される.



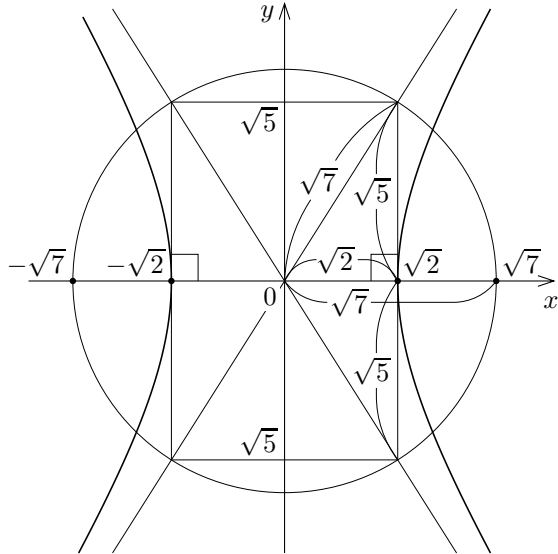
問7.5.1 xy 座標平面

における双曲線 H について、頂点は $(6,0)$ と $(-6,0)$ とであり、漸近線は方程式 $y = \frac{2}{3}x$ が表す直線と方程式 $y = -\frac{2}{3}x$ が表す直線とであるとする． H を表す方程式を求めよ．

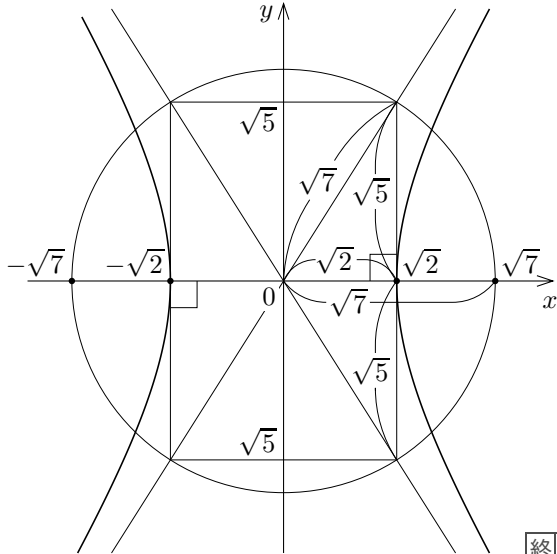
実数 b について点 $(6,b)$ が H の漸近線に属するとき $b = \pm 4$ ．双曲線 H は方程式 $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$ で表される．



例 xy 座標平面における双曲線 H について、焦点は $(\sqrt{7}, 0)$ と $(-\sqrt{7}, 0)$ とであり、2 個の頂点の間隔が $2\sqrt{2}$ であるとする． H を表す方程式及び H の漸近線を表す方程式を求める．双曲線 H について、中心は原点 $(0, 0)$ である．両方の焦点が x 軸に属するので、両方の頂点も x 軸に属す．2 個の頂点の間隔が $2\sqrt{2}$ なので、 H の頂点は $(\sqrt{2}, 0)$ と $(-\sqrt{2}, 0)$ とである．

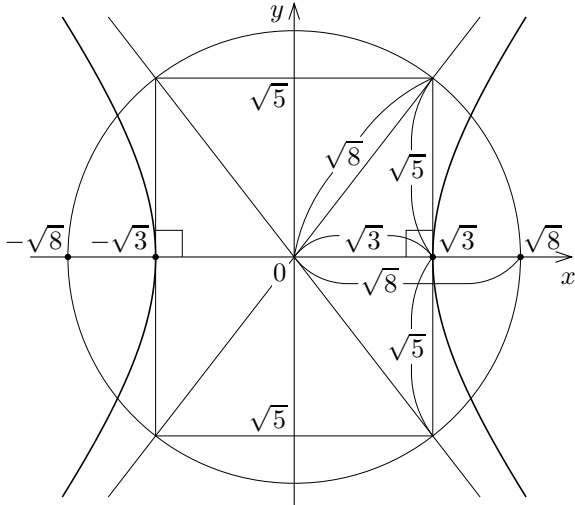


実数 b について点 $(\sqrt{2}, b)$ が H の漸近線に属するとき、 $\sqrt{2}^2 + b^2 = \sqrt{7}^2$ なので $b^2 = 5$. 双曲線 H は方程式 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$ で表される. 漸近線は、方程式 $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{5}} = 0$ が表す直線と方程式 $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{5}} = 0$ が表す直線とである. H の漸近線は、方程式 $\sqrt{5}x + \sqrt{2}y = 0$ が表す直線と方程式 $\sqrt{5}x - \sqrt{2}y = 0$ が表す直線とである.

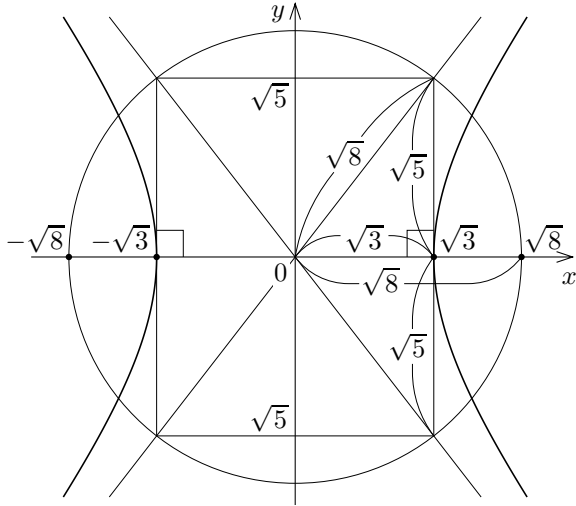


問7.5.2 xy 座標平面における双曲線 H について、焦点は $(\sqrt{8}, 0)$ と $(-\sqrt{8}, 0)$ とであり、2 個の頂点の間隔が $2\sqrt{3}$ であるとする． H を表す方程式及び H の漸近線を表す方程式を求めよ．

双曲線 H について、中心は原点 $(0, 0)$ である．両方の焦点が x 軸に属するので、両方の頂点も x 軸に属する．2 個の頂点の間隔が $2\sqrt{3}$ なので、頂点は $(\sqrt{3}, 0)$ と $(-\sqrt{3}, 0)$ とである．

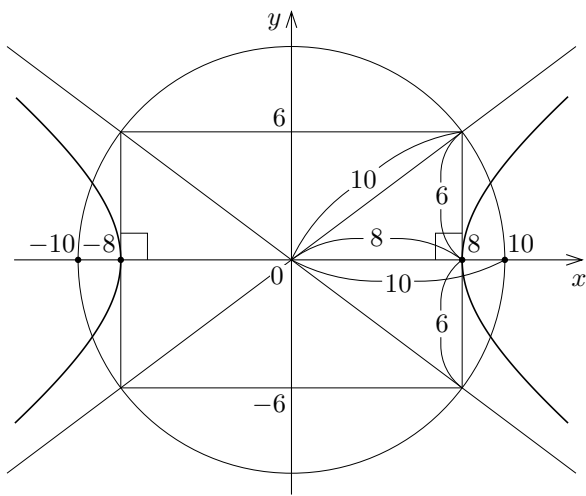


実数 b について点 $(\sqrt{3}, b)$ が H の漸近線に属するとき、 $\sqrt{3}^2 + b^2 = \sqrt{8}^2$ なので $b^2 = 5$. 双曲線 H は方程式 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ で表される. 漸近線は、方程式 $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{5}} = 0$ が表す直線と方程式 $\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{5}} = 0$ が表す直線とである. つまり、 H の漸近線は、方程式 $\sqrt{5}x + \sqrt{3}y = 0$ が表す直線と方程式 $\sqrt{5}x - \sqrt{3}y = 0$ が表す直線とである.

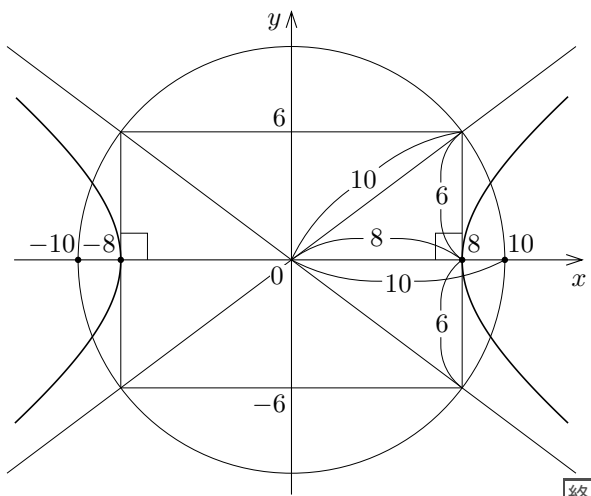


例 xy 座標平面における
 双曲線 H について、焦点
 は $(10,0)$ と $(-10,0)$ と
 であり、漸近線は方程式
 $y = \frac{3}{4}x$ が表す直線と方程
 式 $y = -\frac{3}{4}x$ が表す直線と
 であるとする． H を表す方
 程式を求めよ．

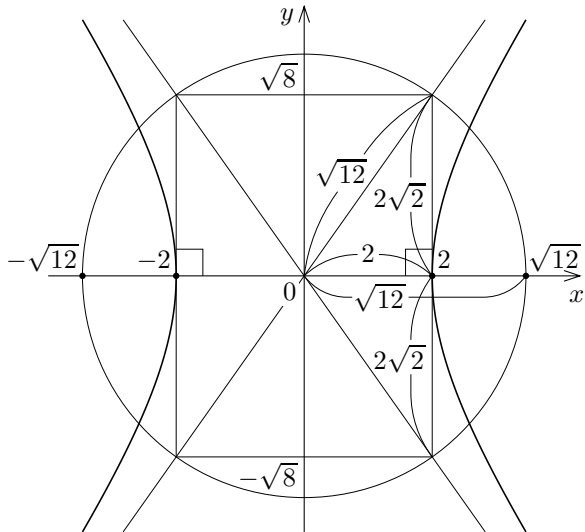
双曲線 H について、中
 心は原点 $(0,0)$ である．両
 方の焦点が x 軸に属するので、
 両方の頂点が x 軸に属す．



実数 a について点 $(a,0)$ が
 H の頂点であるとする、
 原点 $(0,9)$ と点 $(a, \frac{3}{4}a)$
 との間の距離が 10 なの
 で、 $a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = 10^2$,
 $\frac{25}{16}a^2 = 10^2$, $a = \pm 8$.
 双曲線 H は方程式
 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ で表される.

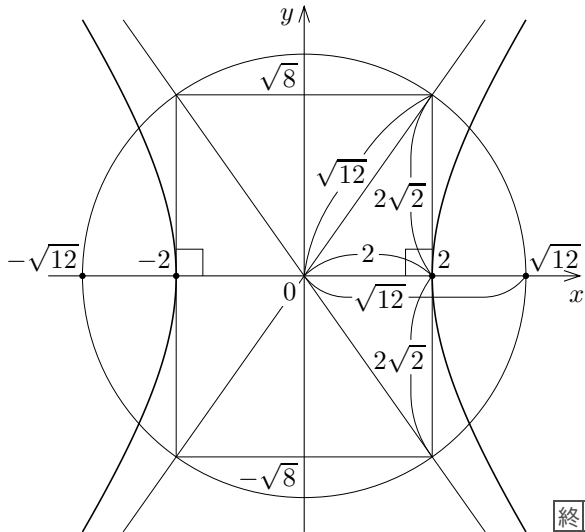


問7.5.3 xy 座標平面における双曲線 H について、焦点は $(\sqrt{12}, 0)$ と $(-\sqrt{12}, 0)$ とであり、漸近線は方程式 $y = \sqrt{2}x$ が表す直線と方程式 $y = -\sqrt{2}x$ が表す直線とであるとする. H を表す方程式を求める. 双曲線 H について、中心は原点 $(0, 0)$ である. 両方の焦点が x 軸に属するので、両方の頂点が x 軸に属す.

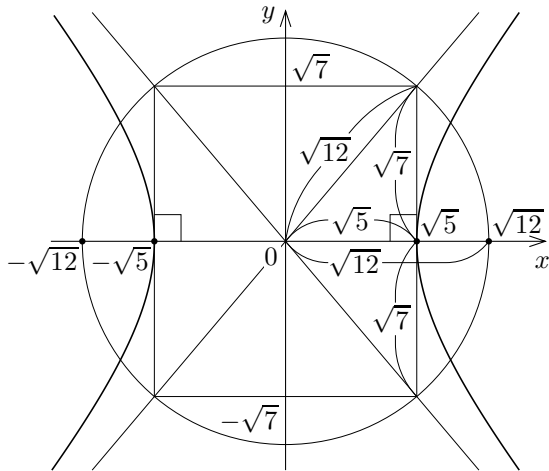


実数 a について点 $(a,0)$ が H の頂点であるとする、
 原点 $(0,0)$ と点 $(a,\sqrt{2}a)$ との間の距離が $\sqrt{12}$ なので、
 $a^2 + (\sqrt{2}a)^2 = \sqrt{12}^2$,
 $3a^2 = 12$, $a = \pm 2$.

双曲線 H は方程式
 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ で表される.



例 xy 座標平面において方程式 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{7} = 1$ が表す双曲線 H の焦点と漸近線とを求め、双曲線 H の概形を描く．双曲線 H について、頂点は $(\sqrt{5}, 0)$ と $(-\sqrt{5}, 0)$ とである．両方の頂点が x 軸に属するので、両方の焦点が x 軸に属す．実数 c について焦点を $(c, 0)$ とおくと、原点 $(0, 0)$ と点 $(\sqrt{5}, \sqrt{7})$ との間の距離が $|c|$ なので、 $\sqrt{5}^2 + \sqrt{7}^2 = c^2$, $c = \pm\sqrt{12}$. 双曲線 H の焦点は $(\sqrt{12}, 0)$ と $(-\sqrt{12}, 0)$ とである．



H の漸近線は、方程式

$$\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{7}} = 0 \quad \text{が表す直線}$$

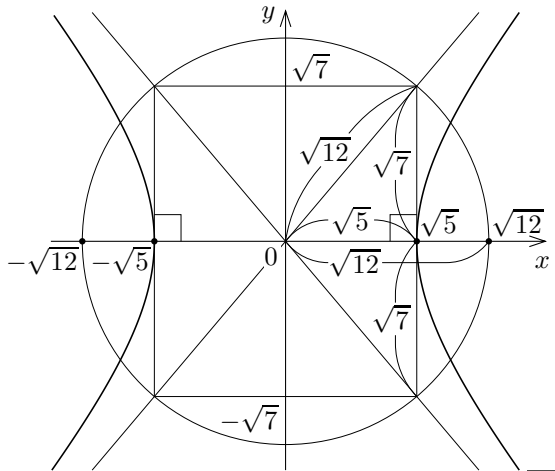
と方程式 $\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{y}{\sqrt{7}} = 0$ が

表す直線とである．双曲

線 H の漸近線は、方程式

$$\sqrt{7}x + \sqrt{5}y = 0 \quad \text{が表す直線}$$

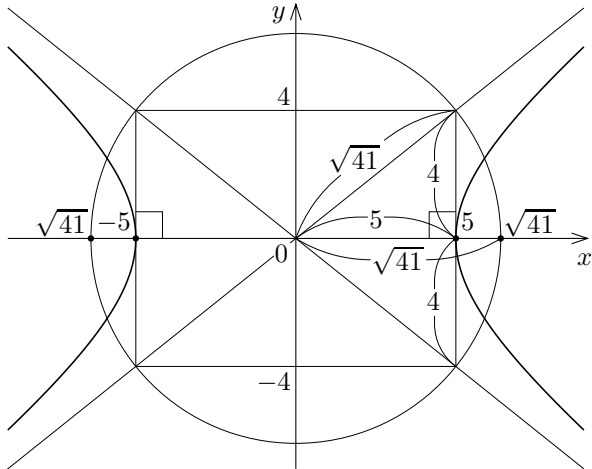
と方程式 $\sqrt{7}x - \sqrt{5}y = 0$ が
表す直線とである．



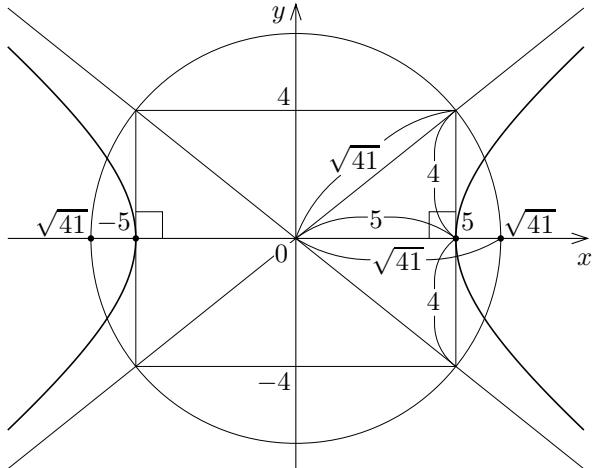
終

問7.5.4 xy 座標平面において方程式 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ が表す双曲線 H の焦点と漸近線とを求め、双曲線 H の概形を描け.

双曲線 H について、頂点は $(5,0)$ と $(-5,0)$ とである. 両方の頂点が x 軸に属するので、両方の焦点が x 軸に属す. 実数 c について焦点を $(c,0)$ とおくと、原点 $(0,0)$ と点 $(5,4)$ との間の距離が $|c|$ なので、 $5^2 + 4^2 = c^2$, $c = \pm\sqrt{41}$. 双曲線 H の焦点は $(\sqrt{41},0)$ と $(-\sqrt{41},0)$ とである.



H の漸近線は，方程式 $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 0$ が表す直線と
 方程式 $\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 0$ が表す直線とである．双曲線
 H の漸近線は，方程式 $4x + 5y = 0$ が表す直線と
 方程式 $4x - 5y = 0$ が表す直線とである．



反比例のグラフは双曲線であることを示す.

定数 a について $a > 0$ とする. xy 座標平面において, 点 $A = (a, a)$ と $B = (-a, -a)$ とが焦点であり 2 個の頂点の間の距離が $2a$ である双曲線 H を表す方程式を求める. 変数 x, y に対して $P = (x, y)$ とおく.

$$\overline{AP}^2 = (x - a)^2 + (y - a)^2 = x^2 - 2ax + y^2 - 2ay + 2a^2 ,$$

$$\overline{BP}^2 = (x + a)^2 + (y + a)^2 = x^2 + 2ax + y^2 + 2ay + 2a^2 .$$

$|\overline{AP} - \overline{BP}| = 2a$ とすると, $\overline{AP} - \overline{BP} = \pm 2a$, $\overline{BP} = \overline{AP} \pm 2a$, よって,

$$\overline{BP}^2 = (\overline{AP} \pm 2a)^2 = 4a^2 \pm 4a\overline{AP} + \overline{AP}^2 ,$$

$$x^2 + 2ax + y^2 + 2ay + 2a^2 = 4a^2 \pm 4a\overline{AP} + x^2 - 2ax + y^2 - 2ay + 2a^2 ,$$

$$\pm 4a\overline{AP} = 4a(x + y) - 4a^2 = 4a(x + y - a) ,$$

$$\pm \overline{AP} = x + y - a ,$$

$$\overline{AP}^2 = (x + y - a)^2 ,$$

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2ay + 2a^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 ,$$

$$a^2 = 2xy ,$$

$$a^2 = 2xy ,$$

$$xy = \frac{a^2}{2} .$$

証明は省くが，逆に方程式 $xy = \frac{a^2}{2}$ から $|\overline{AP} - \overline{BP}| = 2a$ を導くことができる．よって，

$$(x, y) \in H \Leftrightarrow P \in H \Leftrightarrow |\overline{AP} - \overline{BP}| = 2a \Leftrightarrow xy = \frac{a^2}{2} .$$

よって双曲線 H は方程式 $xy = \frac{a^2}{2}$ で表される．定数 k を $k = \frac{a^2}{2}$ と

おく． $a = \sqrt{2k}$ ． $xy = k$ なので $y = \frac{k}{x}$ ． 故に，正の定数 k に対し

て，方程式 $y = \frac{k}{x}$ で表される反比例のグラフは双曲線であり，焦点は

$(a, a) = (\sqrt{2k}, \sqrt{2k})$ と $(-a, -a) = (-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$ とであり，主軸は方程式 $y = x$ で表される直線であり，頂点は $(\sqrt{k}, \sqrt{k})$ と $(-\sqrt{k}, -\sqrt{k})$ とである．

一般的に次の定理が成り立つ．その証明は省く．

[定理] 定数 a, b, c, d, e, f, g について, $ae \neq bd$ かつ $g \neq 0$ とする． xy 座標平面において方程式 $(ax + by + c)(dx + ey + f) = g$ が表す図形は双曲線であり, その漸近線は方程式 $ax + by + c = 0$ が表す直線と方程式 $dx + ey + f = 0$ が表す直線とである．