

## 7.4

楯円

座標平面  $\mathbf{R}^2$  において 2 点  $A$  と  $B$  について  $\overline{AB} = 5$  とする. 右図において,  $\mathbf{R}^2$  の点  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_8$  は次のような点とする:

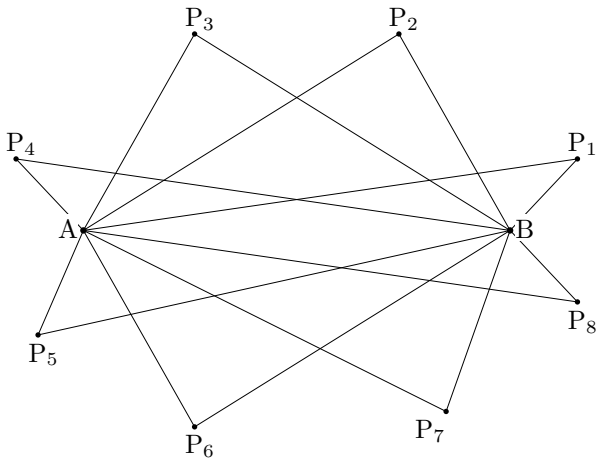
$$\overline{AP_1} + \overline{BP_1} = 7,$$

$$\overline{AP_2} + \overline{BP_2} = 7,$$

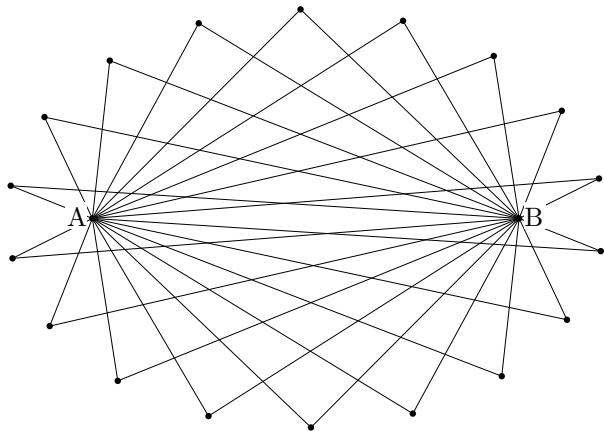
$$\overline{AP_3} + \overline{BP_3} = 7,$$

$$\vdots$$

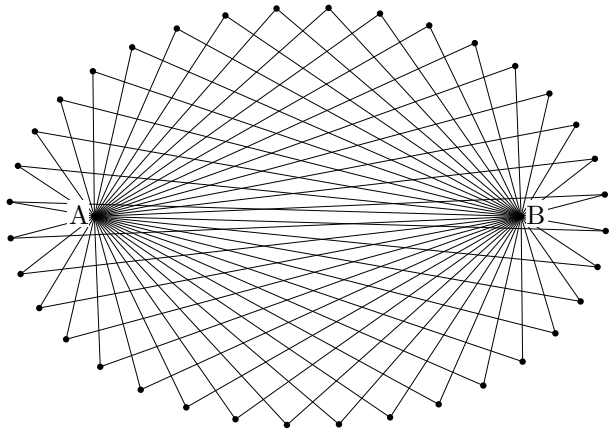
$$\overline{AP_8} + \overline{BP_8} = 7.$$



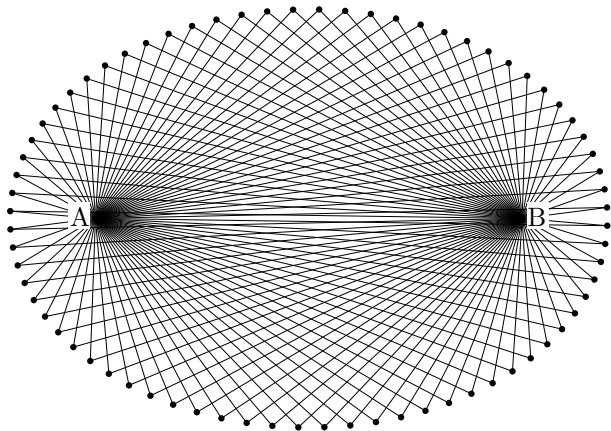
$\overline{AB} = 5$  である点  $A$   
 と  $B$  とに対して、  
 $\overline{AP} + \overline{BP} = 7$  である  
 点  $P$  を多数とると右  
 図のようになる。



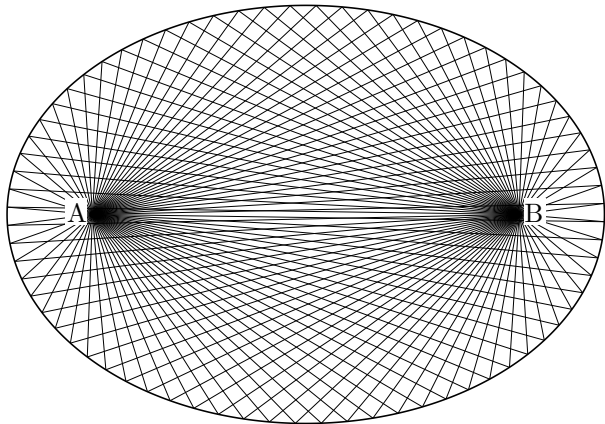
$\overline{AB} = 5$  である点  $A$   
と  $B$  とに対して,  
 $\overline{AP} + \overline{BP} = 7$  である  
点  $P$  を多数とると右  
図のようになる.



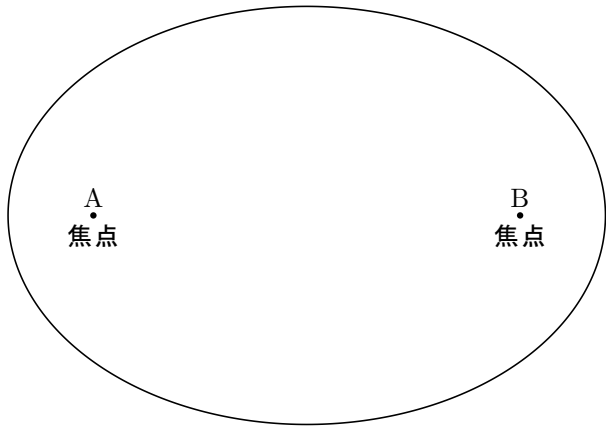
$\overline{AB} = 5$  である点  $A$   
と  $B$  とに対して,  
 $\overline{AP} + \overline{BP} = 7$  である  
点  $P$  を多数とると右  
図のようになる.



$\overline{AB} = 5$  である点 A  
と B とに対して,  
 $\overline{AP} + \overline{BP} = 7$  である  
点 P を集めると右図  
のような曲線になる.



$\overline{AB} = 5$  である点 A  
と B とに対して,  
 $\overline{AP} + \overline{BP} = 7$  である  
点 P を集めると右図  
のような曲線になる.  
このような曲線を楕  
円といい, 点 A と  
B とを焦点という.



[定義] 座標平面  $\mathbf{R}^2$  において, 定点  $F_1$  と  $F_2$  と定数  $k$  について  $k \geq \overline{F_1 F_2}$  であるとき,  $\overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = k$  である点  $P$  の全体

$$\{ P \in \mathbf{R}^2 \mid \overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = k \}$$

を楕円といい, 点  $F_1$  と  $F_2$  とを焦点という.

定数  $k$  について  $k \geq 0$  とする. 座標平面  $\mathbf{R}^2$  の定点  $F_1, F_2$  について  $F_2 = F_1$  のとき,  $\mathbf{R}^2$  の点  $P$  について,

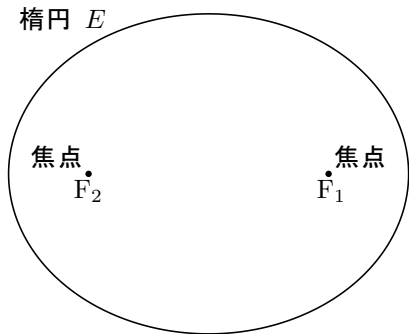
$$\overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = k \Leftrightarrow \overline{F_1 P} + \overline{F_1 P} = k \Leftrightarrow 2\overline{F_1 P} = k \Leftrightarrow \overline{F_1 P} = \frac{k}{2} .$$

$F_2 = F_1$  のとき, 点  $F_1$  と  $F_2$  とを焦点とする楕円は

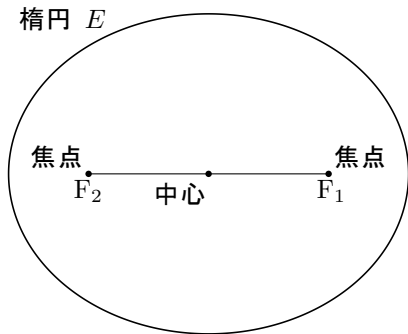
$$\{ P \in \mathbf{R}^2 \mid \overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = k \} = \left\{ P \in \mathbf{R}^2 \mid \overline{F_1 P} = \frac{k}{2} \right\} .$$

この点集合は  $F_1 = F_2$  を中心とする円である. つまり, 楕円の 2 個の焦点が重なるとき, その楕円は円である.

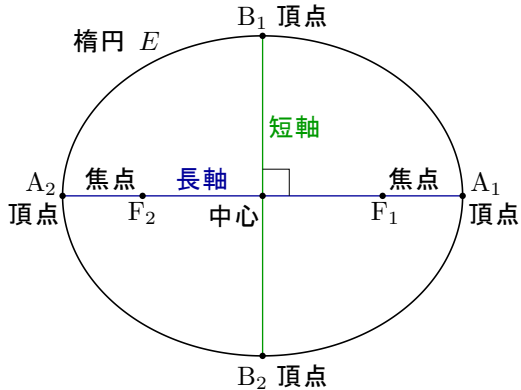
座標平面  $\mathbf{R}^2$  において点  $F_1$  と  $F_2$  とを焦点とする楕円  $E$  を考える.



楕円  $E$  の焦点  $F_1$  と  $F_2$  とを  
結ぶ線分  $F_1F_2$  の中点を  $E$  の中  
心という.



楕円  $E$  の焦点  $F_1$  と  $F_2$  とが属す直線と  $E$  との 2 個の共有点  $A_1$  と  $A_2$  とを結ぶ線分  $A_1A_2$  を  $E$  の長軸という.  $E$  の焦点  $F_1$  と  $F_2$  とを結ぶ線分  $F_1F_2$  の垂直 2 等分線と楕円  $E$  との 2 個の共有点  $B_1$  と  $B_2$  とを結ぶ線分  $B_1B_2$  を  $E$  の短軸という. 長軸と短軸とは互いに垂直である. 楕円は長軸及び短軸について対称である. 長軸の両端点  $A_1, A_2$  及び短軸の両端点  $B_1, B_2$  を頂点という.



楕円  $E$  において, 焦点  $F_1, F_2$   
 及び長軸に属す頂点  $A_1, A_2$  及び  
 各点  $P$  について,

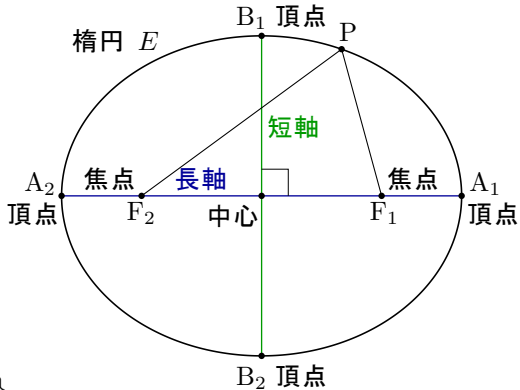
$$\begin{aligned}\overline{F_1P} + \overline{F_2P} &= \overline{F_1A_2} + \overline{F_2A_2} \\ &= \overline{A_2F_1} + \overline{F_1A_1} \\ &= \overline{A_2A_1} .\end{aligned}$$

楕円  $E$  は  $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \overline{A_1A_2}$  で  
 ある点  $P$  の全体である:

$$E = \{ P \in \mathbf{R}^2 \mid \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \overline{A_1A_2} \} .$$

[定理 7.4.1] 座標平面において, 点  $F_1$  と  $F_2$  とを焦点とする楕円  $E$  の長軸の  
 長さを  $k$  とおくと, 各点  $P$  について

$$P \in E \Leftrightarrow \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = k .$$



楕円  $E$  において、長軸の長さの半분을  $a$  とおき、短軸の長さの半분을  $b$  とおき、焦点と中心との間の距離を  $c$  とおく。  
 $\overline{F_1B_1} + \overline{F_2B_1}$  は  $E$  の長軸の長さ  
 は  $2a$  なので

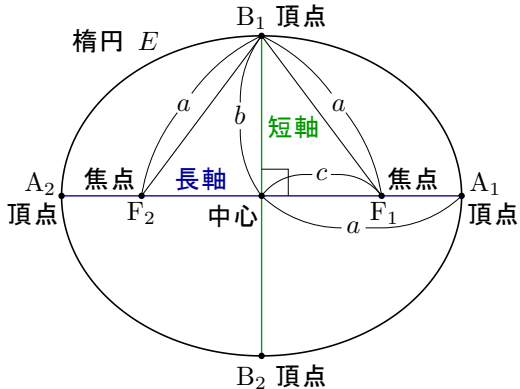
$$\overline{F_1B_1} + \overline{F_2B_1} = 2a .$$

$\overline{F_1B_1} = \overline{F_2B_1}$  なので

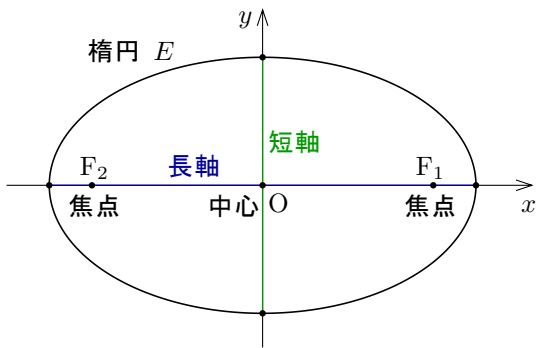
$$\overline{F_1B_1} = a .$$

ピタゴラスの定理により  $a^2 = b^2 + c^2$  .

[定理 7.4.2] 楕円において、長軸の長さの  $\frac{1}{2}$  を  $a$  とおき、短軸の長さの  $\frac{1}{2}$  を  $b$  とおき、焦点と中心との間の距離を  $c$  とおくと、  $a^2 = b^2 + c^2$  .



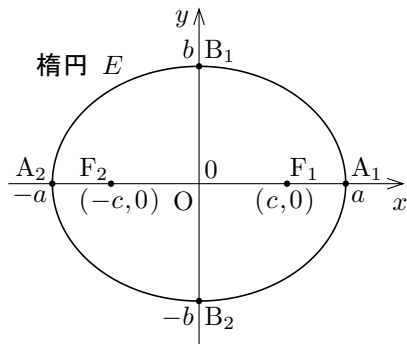
$xy$  座標平面において楕円  $E$  を考えるときは、標準では、 $E$  の焦点  $F_1$  と  $F_2$  とが  $x$  軸に属し、 $E$  の中心が原点  $(0,0)$  であるようにする．長軸は  $x$  軸に含まれ、短軸は  $y$  軸に含まれる．このような楕円を表す方程式を導く．



[定理 7.4.3] 0 でない定数  $a, b$  について,  $xy$  座標平面における楕円  $E$  の頂点が  $(a, 0)$  と  $(-a, 0)$  と  $(0, b)$  と  $(0, -b)$  とであるとき,  $E$  は方程式  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  で表される.

[証明] 定数  $a, b$  について  $a \geq b > 0$  のときを扱う.

$xy$  座標平面における楕円  $E$  について, 点  $A_1 = (a, 0)$  と  $A_2 = (-a, 0)$  と  $B_1 = (0, b)$  と  $B_2 = (0, -b)$  とが頂点であるとする.  $E$  の中心は原点  $O = (0, 0)$  である.  $a > b$  なので,  $E$  の長軸は, 線分  $A_1A_2$  であり,  $x$  軸に含まれる. よって, ある正の定数  $c$  をとると,  $E$  の焦点は  $F_1 = (c, 0)$  と  $F_2 = (-c, 0)$  とである.



楕円  $E$  に属す各点  $P = (x, y)$  について,  $\overline{F_1P} + \overline{F_2P}$  は楕円の長軸の長さ  $2a$  なので

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a ,$$

$$\overline{F_2P} = 2a - \overline{F_1P} ,$$

$$\overline{F_2P}^2 = (2a - \overline{F_1P})^2 = 4a^2 - 4a\overline{F_1P} + \overline{F_1P}^2 ,$$

ここで,

$$\overline{F_1P}^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 ,$$

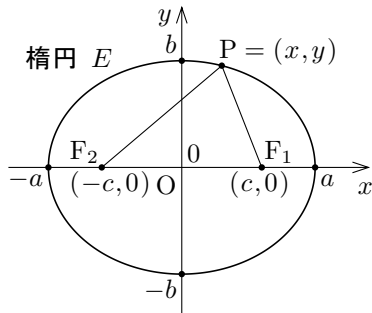
$$\overline{F_2P}^2 = (x + c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 ,$$

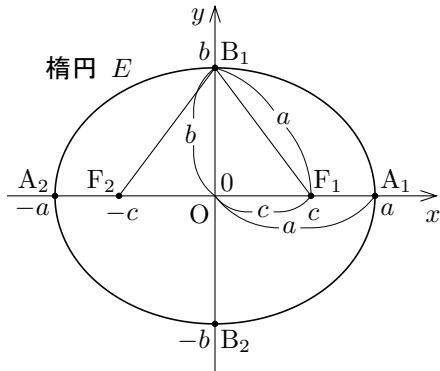
よって

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\overline{F_1P} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 ,$$

$$4a\overline{F_1P} = 4a^2 - 4cx ,$$

$$\overline{F_1P} = a - \frac{c}{a}x ,$$





こうして次のことが示された：点  $(x, y)$  が楕円  $E$  に属すならば  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  . 証明は省くが，逆に  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ならば点  $(x, y)$  が楕円  $E$  に属す. 故に楕円  $E$  は方程式  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  で表される.

証明終了

0 でない定数  $a, b$  に対して,  $xy$  座標平面において楕円を表す方程式  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  を標準形という. 次の定理の証明は省く.

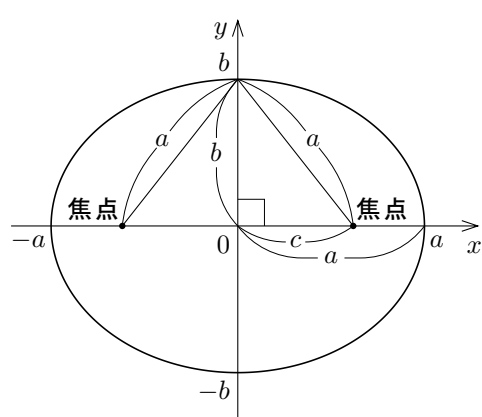
[定理 7.4.4] 正の定数  $a, b$  に対して,  $xy$  座標平面において方程式  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  が表す点集合  $E$  は楕円であり,  $E$  の中心は原点  $(0,0)$  であり,  $E$  の頂点は  $(a,0)$  と  $(-a,0)$  と  $(0,b)$  と  $(0,-b)$  とである;

(1)  $a > b$  のとき,  $a^2 = b^2 + c^2$  である定数  $c$  に対して,  $E$  の焦点は  $(c,0)$  と  $(-c,0)$  とである;

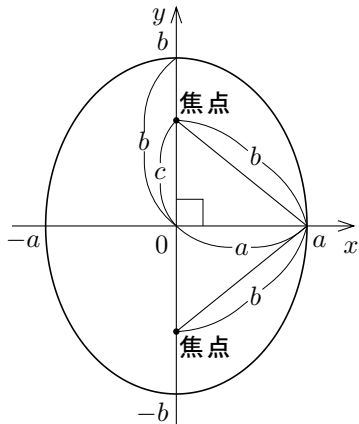
(2)  $a = b$  のとき,  $E$  は原点  $(0,0)$  を中心とする半径  $a$  の円である;

(3)  $a < b$  のとき,  $b^2 = a^2 + c^2$  である定数  $c$  に対して,  $E$  の焦点は  $(0,c)$  と  $(0,-c)$  とである.

正の実数  $a, b, c$  に対して,  $xy$  座標平面において方程式  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  が表す楕円は次の図のようになる.

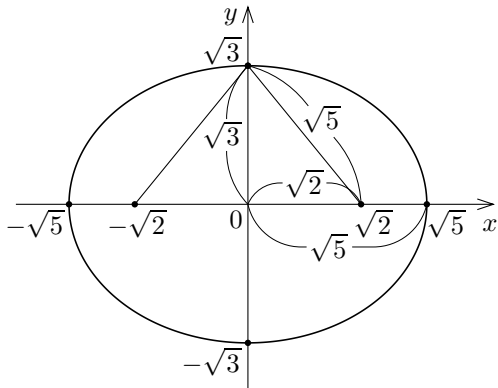


$a > b$  で  $b^2 + c^2 = a^2$  のとき

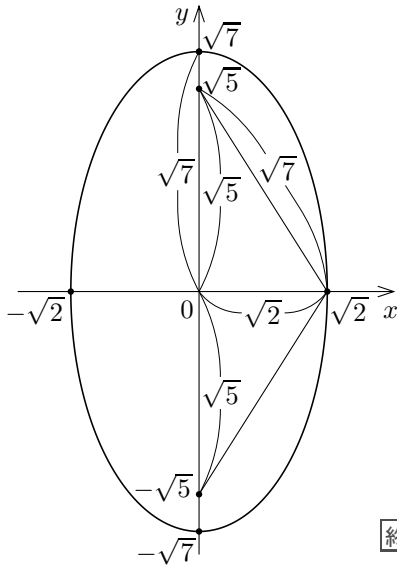


$b > a$  で  $a^2 + c^2 = b^2$  のとき

**例**  $xy$  座標平面における楕円  $E$  について、焦点が  $(\sqrt{2}, 0)$  と  $(-\sqrt{2}, 0)$  とであり長軸の長さが  $2\sqrt{5}$  であるとする.  $E$  を表す方程式を求める. 楕円  $E$  について、両方の焦点が  $x$  軸に属するので、長軸は  $x$  軸に含まれる. 中心は原点  $(0, 0)$  である. 短軸は  $y$  軸に含まれる. 長軸の長さが  $2\sqrt{5}$  なので、 $x$  軸に属す頂点は  $(\sqrt{5}, 0)$  と  $(-\sqrt{5}, 0)$  とである. 実数  $b$  について点  $(0, b)$  が  $y$  軸に属す頂点であるとき、 $\sqrt{2}^2 + b^2 = \sqrt{5}^2$  なので  $b^2 = 3$ . 楕円  $E$  は方程式  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$  で表される.

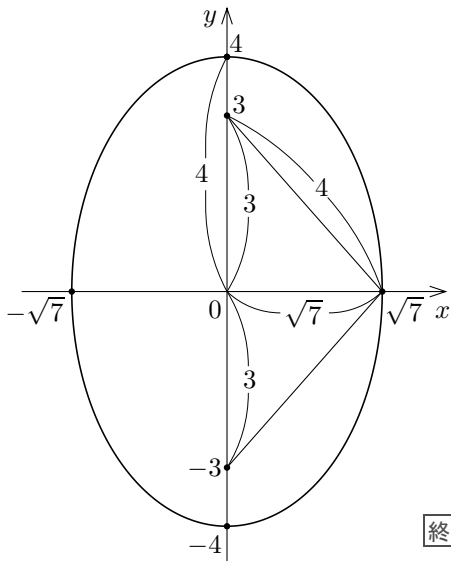


**例**  $xy$  座標平面における楕円  $E$  について、焦点が  $(0, \sqrt{5})$  と  $(0, -\sqrt{5})$  とであり短軸の長さが  $2\sqrt{2}$  であるとする.  
 $E$  を表す方程式を求める. 楕円  $E$  について、両方の焦点が  $y$  軸に属するので、長軸は  $y$  軸に含まれる. 中心は原点  $(0, 0)$  である. 短軸は  $x$  軸に含まれる. 短軸の長さが  $2\sqrt{2}$  なので、 $x$  軸に属す頂点は  $(\sqrt{2}, 0)$  と  $(-\sqrt{2}, 0)$  とである. 実数  $b$  について点  $(0, b)$  が  $y$  軸に属す頂点であるとき、 $\sqrt{2}^2 + \sqrt{5}^2 = b^2$  なので  $b^2 = 7$ . 楕円  $E$  は方程式  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{7} = 1$  で表される.



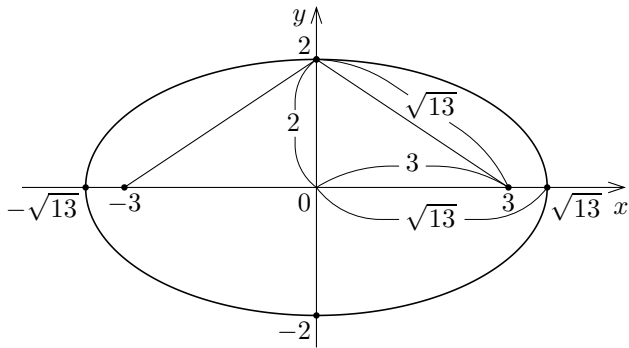
**問7.4.1**  $xy$  座標平面における楕円  $E$  について、焦点は  $(0,3)$  と  $(0,-3)$  とであり長軸の長さが  $8$  であるとする.  $E$  を表す方程式を求めよ.

楕円  $E$  について、両方の焦点が  $y$  軸に属するので、長軸は  $y$  軸に含まれる. 中心は原点  $(0,0)$  である. 短軸は  $x$  軸に含まれる. 長軸の長さが  $8$  なので、 $y$  軸に属す頂点は  $(0,4)$  と  $(0,-4)$  とである. 実数  $a$  について点  $(a,0)$  が  $x$  軸に属す頂点であるとき、 $a^2 + 3^2 = 4^2$  なので  $a^2 = 7$ . 楕円  $E$  は方程式  $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$  で表される.



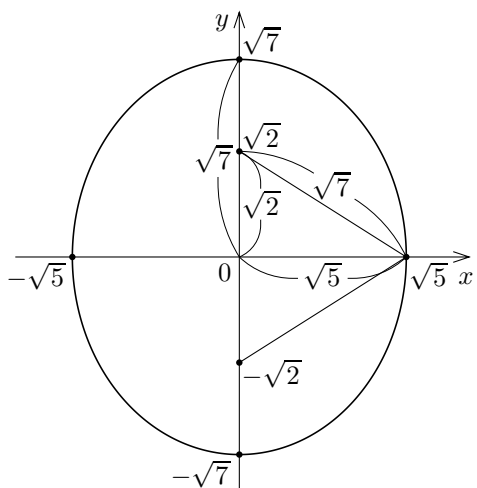
**問7.4.2**  $xy$  座標平面における楕円  $E$  について、焦点は  $(3,0)$  と  $(-3,0)$  とであり短軸の長さが  $4$  であるとする.  $E$  を表す方程式を求めよ.

楕円  $E$  について、  
 両方の焦点が  $x$  軸に属するので、長軸は  $x$  軸に含まれる. 中心は原点  $(0,0)$  である. 短軸は  $y$  軸に含まれる. 短軸の長さが  $4$  なので、 $y$  軸に属す頂点は  $(2,0)$  と  $(-2,0)$  とである. 実数



$a$  について点  $(a,0)$  が  $x$  軸に属す頂点であるとき、 $a^2 = 3^2 + 2^2 = 13$ . 楕円  $E$  は方程式  $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1$  で表される.

**例**  $xy$  座標平面において方程式  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$  が表す楕円  $E$  の中心と焦点とを求め、その楕円の概形を描く. 楕円  $E$  の中心は原点  $(0,0)$  である.  $y=0$  のとき  $x=\pm\sqrt{5}$  なので、 $E$  と  $x$  軸との共有点は  $(\sqrt{5},0)$  と  $(-\sqrt{5},0)$  とである.  $x=0$  のとき  $y=\pm\sqrt{7}$  なので、 $E$  と  $y$  軸との共有点は  $(0,\sqrt{7})$  と  $(0,-\sqrt{7})$  とである. 長軸が  $y$  軸に含まれるので、 $E$  の焦点は  $y$  軸に属す. 実数  $c$  について点  $(0,c)$  が焦点であるとき、 $\sqrt{5}^2 + c^2 = \sqrt{7}^2$  なので  $c=\pm\sqrt{2}$ . 楕円  $E$  の焦点は  $(0,\sqrt{2})$  と  $(0,-\sqrt{2})$  とである.



**問7.4.3**  $xy$  座標平面において方程式  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{3} = 1$  が表す楕円  $E$  の中心と焦点とを求め、その楕円の概形を描け.

楕円  $E$  の中心は原点  $(0,0)$  である.  $y=0$  のとき  $x = \pm\sqrt{8}$  なので,  $E$  と  $x$  軸との共有点は  $(\sqrt{8},0)$  と  $(-\sqrt{8},0)$  とである.  $x=0$  のとき  $y = \pm\sqrt{3}$  なので,  $E$  と  $y$  軸との共有点は  $(0,\sqrt{3})$  と  $(0,-\sqrt{3})$  とである. 長軸が  $x$  軸に含まれるので,  $E$  の焦点

は  $x$  軸に属す. 実数  $c$  について点  $(c,0)$  が焦点であるとき,  $c^2 + \sqrt{3}^2 = \sqrt{8}^2$  なので  $c = \pm\sqrt{5}$ . 楕円  $E$  の焦点は  $(\sqrt{5},0)$  と  $(-\sqrt{5},0)$  とである. [終]

