

7.3

放物線

座標平面 $\mathbb{R}^2$ において直線 L と点 F とを定める．右図において， $\mathbb{R}^2$ の点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_9$ は次のような点とする：

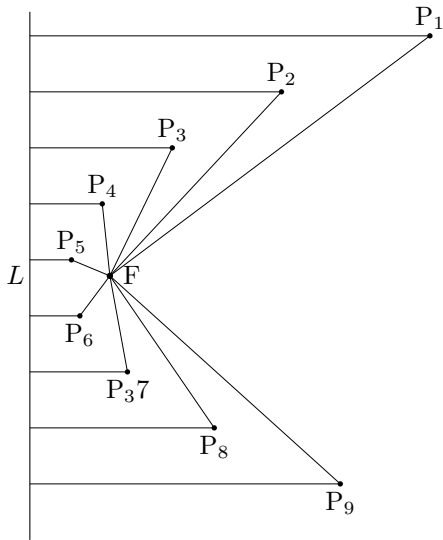
P_1 と L との距離が $\overline{FP_1}$ である；

P_2 と L との距離が $\overline{FP_2}$ である；

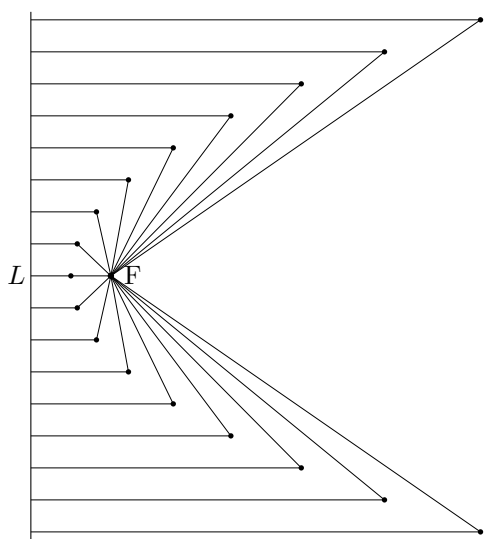
P_3 と L との距離が $\overline{FP_3}$ である；

⋮

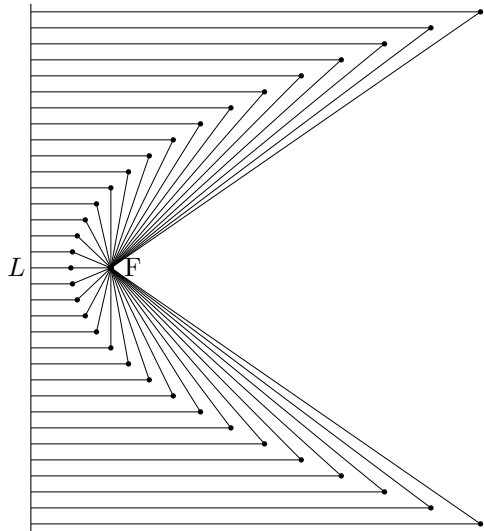
P_9 と L との距離が $\overline{FP_9}$ である．



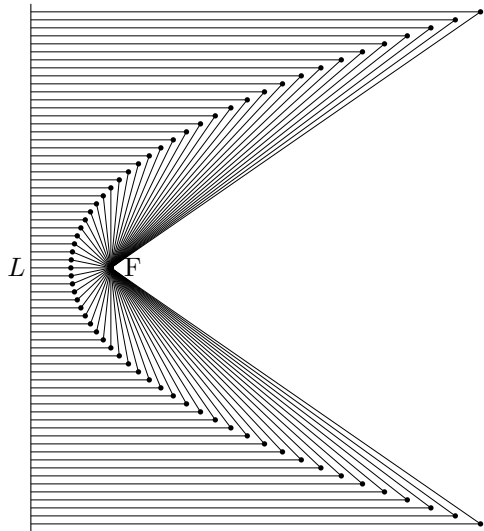
このように、 P と L との距離が $\overline{FP}$ とである点 P を沢山とると右図のようになる.



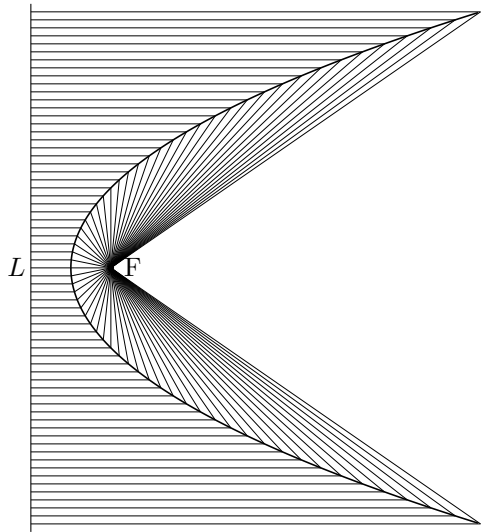
このように、 P と L との距離が $\overline{FP}$ とである点 P を沢山とると右図のようになる.



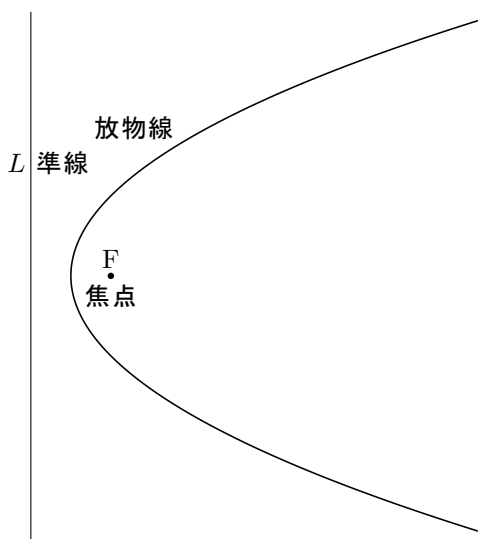
このように、 P と L との距離が $\overline{FP}$ とである点 P を沢山とると右図のようになる.



そして更にこのような点を集めると右図のような曲線になる.



そして更にこのような点を集めると右図のような曲線になる。このような曲線を放物線といい、点 F を焦点といい、直線 L を準線という。



[定義] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において点 F は直線 L に属さないとする. 点 F と直線 L に対して, 点 P と直線 L との距離が $\overline{FP}$ と同じになる点 P の全体

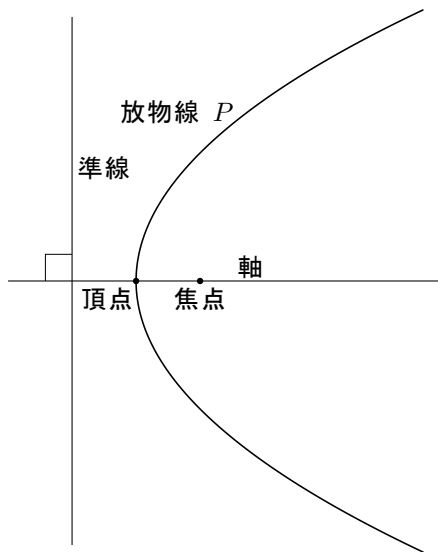
$$\{ P \in \mathbf{R}^2 \mid P \text{ と直線 } L \text{ との距離が } \overline{FP} \text{ である} \}$$

を, 点 F を焦点とし直線 L を準線とする放物線という.

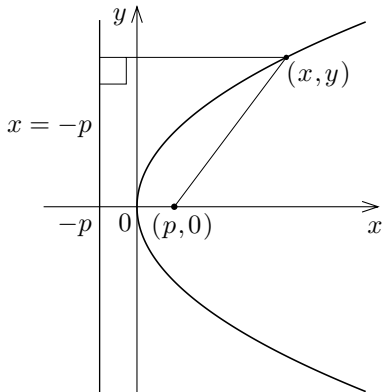
この定義より, 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において, 点 F を焦点とし直線 L を準線とする放物線とは次のような点集合 P のことである:

$\mathbf{R}^2$ の各点 Q について $Q \in P \Leftrightarrow Q$ と L との距離が $\overline{FQ}$ である.

座標平面における放物線 P について、準線に垂直で焦点が属す直線を放物線 P の軸といい、放物線 P とその軸との共有点を P の頂点という。証明は省くが、放物線 P はその軸に関して線対称で、 P の頂点は唯一つだけある。



[定理 7.3] 定数 p は 0 でないとする. xy 座標平面において, 焦点が点 $(p,0)$ であり準線が直線 $x = -p$ である放物線は方程式 $y^2 = 4px$ で表される; 逆に, 方程式 $y^2 = 4px$ で表される点集合は焦点が点 $(p,0)$ であり準線が直線 $x = -p$ である放物線である.



証明 座標平面の各点 $Q = (x, y)$ について, Q と直線 $x = -p$ との距離は $|x - (-p)| = |x + p|$ であり, 点 $F = (p, 0)$ に対して $\overline{FQ} = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$.
 $|x + p| \geq 0$, $\sqrt{(x - p)^2 + y^2} \geq 0$ なので,

Q と直線 $x = -p$ との距離が $\overline{FQ}$ である

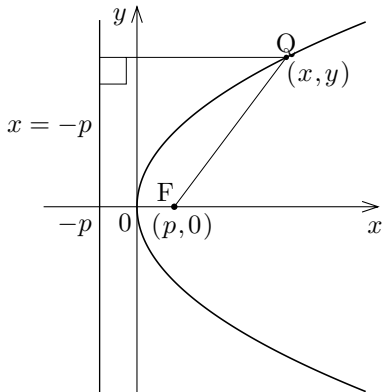
$$\Leftrightarrow |x + p| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow |x + p|^2 = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}^2$$

$$\Leftrightarrow (x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 4px = y^2 .$$



各点 $Q = (x, y)$ について,

Q と直線 $x = -p$ との距離が $\overline{FQ}$ である $\Leftrightarrow 4px = y^2$.

焦点が点 $F = (p, 0)$ であり準線が直線 $x = -p$ である放物線を P とおくと,

$$\begin{aligned}(x, y) \in P &\Leftrightarrow Q \in P \Leftrightarrow Q \text{ と直線 } x = -p \text{ との距離が } \overline{FQ} \text{ である} \\ &\Leftrightarrow 4px = y^2 .\end{aligned}$$

従って放物線 P は方程式 $4px = y^2$ で表される.

逆に, 方程式 $4px = y^2$ が表す点集合を P とおくと,

$$\begin{aligned}Q \in P &\Leftrightarrow (x, y) \in P \Leftrightarrow 4px = y^2 \\ &\Leftrightarrow Q \text{ と直線 } x = -p \text{ との距離が } \overline{FQ} \text{ である} .\end{aligned}$$

従って点集合 P は放物線であり焦点は点 $F = (p, 0)$ であり準線は直線 $x = -p$ である.

証明終了

例 xy 座標平面において、焦点が点 $(5,0)$ であり準線が直線 $x = -5$ である放物線 P を表す方程式を求める.

放物線 P は方程式 $y^2 = 4 \cdot 5 \cdot x$ つまり $y^2 = 20x$ で表される.

終

問7.3.1 xy 座標平面において、焦点が点 $(7,0)$ であり準線が直線 $x = -7$ である放物線 B を表す方程式を求めよ.

放物線 P を表す方程式は $y^2 = 4 \cdot 7 \cdot x$ つまり $y^2 = 28x$.

終

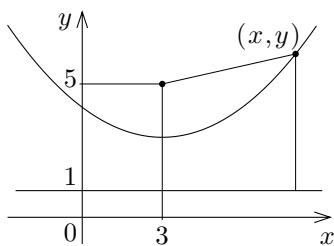
例 xy 座標平面において方程式 $y^2 = 5x$ が表す放物線の焦点と準線の方程式とを求める.

方程式 $y^2 = 5x$ つまり $y^2 = 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot x$ が表す放物線の焦点は $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ であり
準線を表す方程式は $x = -\frac{5}{4}$ である. **終**

問7.3.2 xy 座標平面において方程式 $y^2 = 7x$ が表す放物線の焦点と準線の方程式とを求めよ.

方程式 $y^2 = 7x$ つまり $y^2 = 4 \cdot \frac{7}{4} \cdot x$ が表す放物線の焦点は $\left(\frac{7}{4}, 0\right)$ であり
準線を表す方程式は $x = -\frac{7}{4}$ である. **終**

例 xy 座標平面において、焦点が点 $(3,5)$ であり準線が直線 $y=1$ である放物線 P を表す方程式を求める．変数 x, y について、点 (x, y) と P の準線との間の距離は $|y-1|$ であり、点 (x, y) と P の焦点 $(3,5)$ との間の距離は $\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}$ である． $|y-1| \geq 0$ かつ $\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} \geq 0$ なので、



$$\begin{aligned}
 (x, y) \in P &\Leftrightarrow |y-1| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} \\
 &\Leftrightarrow |y-1|^2 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}^2 \\
 &\Leftrightarrow (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2 \\
 &\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 6x - 8y + 33 = 0 .
 \end{aligned}$$

放物線 P は方程式 $x^2 - 6x - 8y + 33 = 0$ で表される．

問7.3.3 xy 座標平面において、焦点が点 $(7,3)$ であり準線が直線 $x=5$ である放物線 P を表す方程式を求めよ.

変数 x, y について、点 (x, y) と P の準線との間の距離は $|x-5|$ であり、点 (x, y) と P の焦点 $(7, 3)$ との間の距離は $\sqrt{(x-7)^2 + (y-3)^2}$ である。
 $|x-5| \geq 0$ かつ $\sqrt{(x-7)^2 + (y-3)^2} \geq 0$ なので、

$$\begin{aligned}(x, y) \in P &\Leftrightarrow |x-5| = \sqrt{(x-7)^2 + (y-3)^2} \\&\Leftrightarrow |x-5|^2 = \sqrt{(x-7)^2 + (y-3)^2}^2 \\&\Leftrightarrow (x-5)^2 = (x-7)^2 + (y-3)^2 \\&\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 6y + 9 \\&\Leftrightarrow y^2 - 4x - 6y + 33 = 0 .\end{aligned}$$

放物線 P は方程式 $y^2 - 4x - 6y + 33 = 0$ で表される.

終