

7.2

円

座標平面 $\mathbb{R}^2$ において
点 O を定める.

O
•

座標平面 $\mathbf{R}^2$ において
点 O を定める. 右図に
おいて, $\mathbf{R}^2$ の点 $P_1, P_2,$
 $P_3, \dots, P_8$ は次のような
点とする:

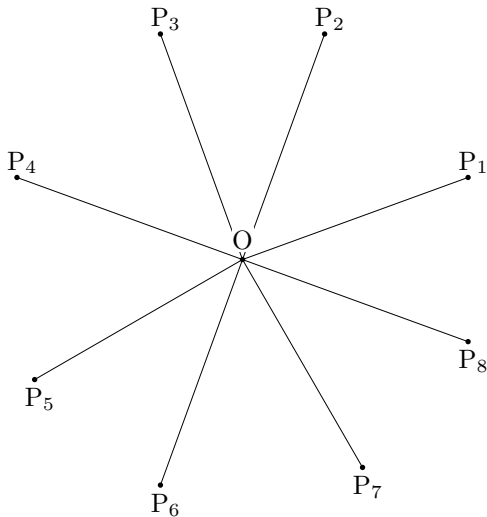
$$\overline{OP_1} = 5,$$

$$\overline{OP_2} = 5,$$

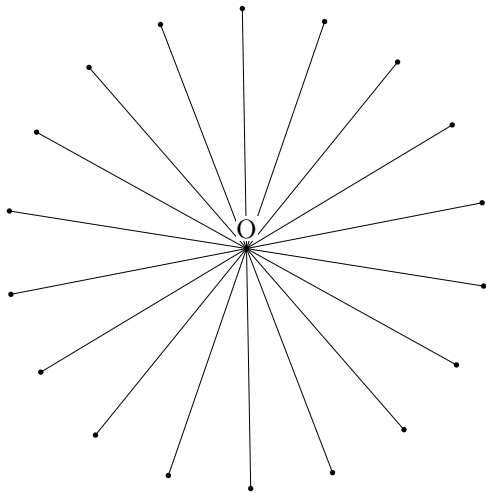
$$\overline{OP_3} = 5,$$

$$\vdots$$

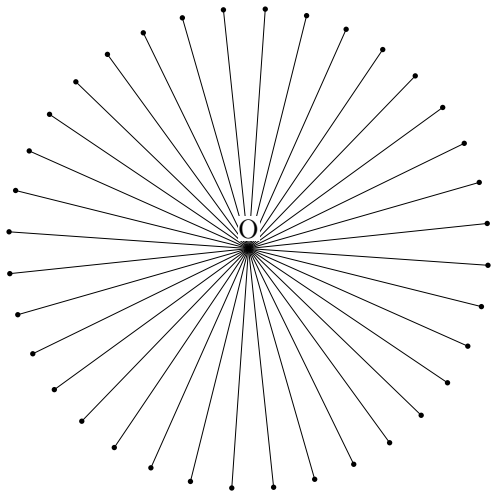
$$\overline{OP_8} = 5.$$



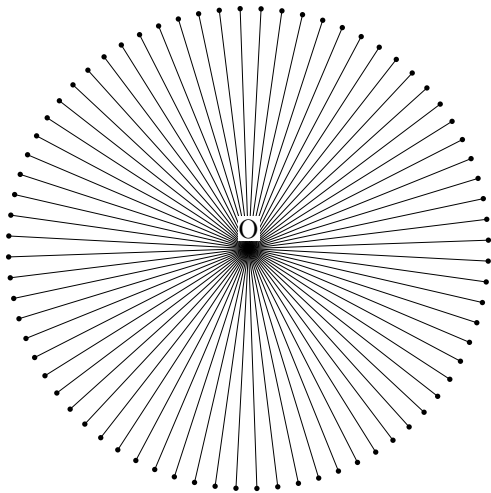
$\overline{OP} = 5$ である点 P を
沢山とると右図のよう
になる.



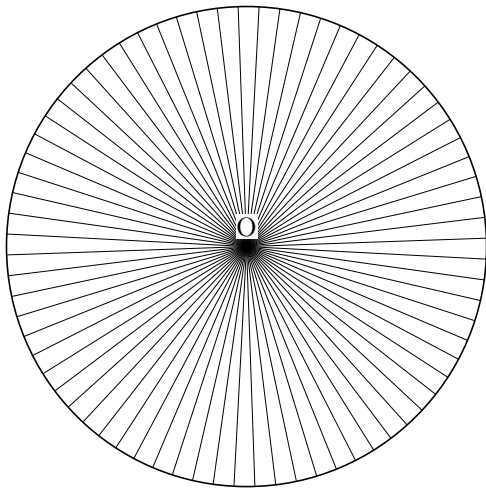
$\overline{OP} = 5$ である点 P を
沢山とると右図のよう
になる.



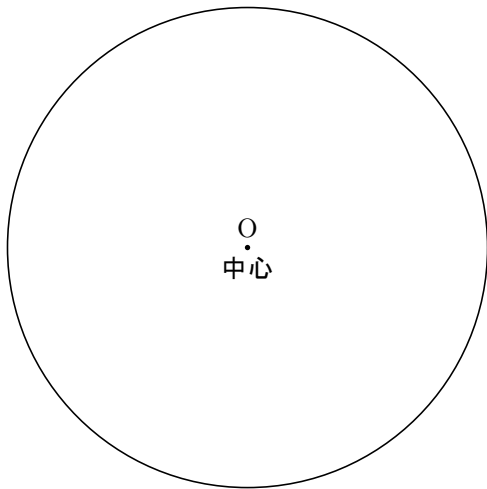
$\overline{OP} = 5$ である点 P を
沢山とると右図のよう
になる.



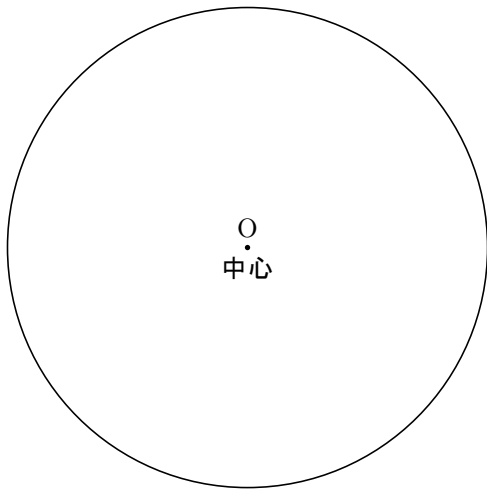
$\overline{OP}$ である点 P を集めると右図のような曲線になる.



$\overline{OP}$ である点 P を集めると右図のような曲線になる．このような曲線を円といい，点 P を中心という．



$\overline{OP}$ である点 P を集めると右図のような曲線になる。このような曲線を円といい、点 P を中心という。円に属す各点 P と中心 O との距離 $\overline{OP} = 5$ の値を半径という。



[定義] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 O 及び 0 以上の実数 r に対して, $\overline{OP} = r$ となる点 P の全体

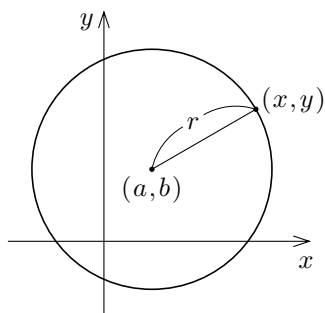
$$\{ P \in \mathbf{R}^2 \mid \overline{OP} = r \}$$

を, 中心が点 O であり半径が r である円という.

この定義より, 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において, 中心が点 O であり半径が 0 以上の実数 r である円とは次のような図形 C のことである:

$$\text{各点 } P \text{ について } P \in C \Leftrightarrow \overline{OP} = r .$$

[定理 7.2] a, b, r は定数で $r \geq 0$ とする. xy 座標平面において, 中心が点 (a, b) であり半径が r である円は方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ で表される; 逆に, 方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ で表される図形は円であり中心は点 (a, b) であり半径は r である.



証明 座標平面の点 O を $O = (a, b)$ とおく. 座標平面の点 $P = (x, y)$ について, $\overline{OP} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\overline{OP} = r &\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 .\end{aligned}$$

定数 a, b, r に対して, xy 座標平面において中心が点 (a, b) であり半径が r である円を C とおく. 座標平面の各点 $P = (x, y)$ について,

$$(x, y) \in C \Leftrightarrow P \in C \Leftrightarrow \overline{OP} = r \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 .$$

従って円 C は方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ で表される.

逆に, 定数 a, b, r に対して, xy 座標平面において方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ が表す図形を C とおく. xy 座標平面の各点 $P = (x, y)$ について

$$P \in C \Leftrightarrow (x, y) \in C \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow \overline{OP} = r .$$

従って図形 C は中心が点 $O = (a, b)$ であり半径が r である円である. **証明終**

例 xy 座標平面において中心が点 $\left(\frac{7}{2}, -5\right)$ であり半径が 3 である円を表す方程式を求める. 中心が点 $\left(\frac{7}{2}, -5\right)$ であり半径が 3 である円の方程式は

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y + 5)^2 = 9 \quad .$$

終

問7.2.1 xy 座標平面において中心が点 $\left(-3, \frac{8}{5}\right)$ であり半径が 7 である円 C を表す方程式を求めよ.

中心が点 $\left(-3, \frac{9}{4}\right)$ であり半径が 7 である円の方程式は $(x+3)^2 + \left(y - \frac{8}{5}\right)^2 = 49$.

例 xy 座標平面において中心が点 $(-3,5)$ である円 C に点 $(2,1)$ が属するとする. C を表す方程式を求める. 円 C の半径 r は点 $(-3,5)$ と点 $(2,1)$ との間の距離なので,

$$r^2 = (-3-2)^2 + (5-1)^2 = 25 + 16 = 41 .$$

円 C は方程式は $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 41$ で表される.

終

問7.2.2 xy 座標平面において円 C の中心は点 $(5, -9)$ であり点 $(-2, -6)$ が C に属すとする. C を表す方程式を求めよ.

円の半径 r は点 $(5, -9)$ と点 $(-2, -6)$ との間の距離なので,

$$r^2 = \{5 - (-2)\}^2 + \{-9 - (-6)\}^2 = 49 + 9 = 58 .$$

円 C は方程式は $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 58$ で表される.

終

例 座標平面において、点 $(3, -1)$ と点 $(2, -4)$ と点 $(7, 1)$ とが属す円 C の中心と半径とを求める．定数 a, b に対して、点 (a, b) が円 C の中心であるとする．点 (a, b) は点 $(3, -1)$ との間の距離と点 $(2, -4)$ との間の距離とが等しいので、

$$\begin{aligned}(a-3)^2 + (b+1)^2 &= (a-2)^2 + (b+4)^2, \\ a^2 - 6a + 9 + b^2 + 2b + 1 &= a^2 - 4a + 4 + b^2 + 8b + 16,\end{aligned}$$

整理すると、 $-2a - 6b = 10$ 、 $a + 3b = -5$ ．また、点 (a, b) は点 $(3, -1)$ との間の距離と点 $(7, 1)$ との間の距離にとが等しいので、

$$\begin{aligned}(a-3)^2 + (b+1)^2 &= (a-7)^2 + (b-1)^2, \\ a^2 - 6a + 9 + b^2 + 2b + 1 &= a^2 - 14a + 49 + b^2 - 2b + 1,\end{aligned}$$

整理すると、 $8a + 4b = 40$ 、 $2a + b = 10$ ．これらの方程式より $a = -7$ かつ $b = -4$ ．故に円 C の中心は $(-7, -4)$ である．円 C の半径は $\sqrt{(7-3)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{41}$ である．

問7.2.3 座標平面において、点 $(-1,4)$ と点 $(3,6)$ と点 $(-2,3)$ とが属す円 C の中心と半径とを求めよ.

定数 a, b に対して、点 (a, b) が円 C の中心であるとする. 点 (a, b) は点 $(-1, 4)$ と点 $(3, 6)$ とから等距離にあるので,

$$(a+1)^2 + (b-4)^2 = (a-3)^2 + (b-6)^2,$$

$$2a+1-8b+16 = -6a+9-12b+36,$$

$8a+4b=28$, $2a+b=7$. また、点 (a, b) は点 $(-1, 4)$ と点 $(-2, 3)$ とから等距離にあるので,

$$(a+1)^2 + (b-4)^2 = (a+2)^2 + (b-3)^2,$$

$$2a+1-8b+16 = 4a+4-6b+9,$$

$2a+2b=4$, $a+b=2$. これらの方程式より $a=5$ かつ $b=-3$. 故に円 C の中心は $(5, -3)$ である. 円 C の半径は $\sqrt{(-1-5)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{85}$ である.

終

例 座標平面において、半径が 5 である円 C に点 $(5,6)$ と点 $(1,-2)$ とが属するとする。円 C の中心を求める。定数 a, b に対して、点 (a, b) が円 C の中心であるとする。点 (a, b) は点 $(5,6)$ との間の距離と点 $(1,-2)$ との間の距離とが等しいので、

$$(a-5)^2 + (b-6)^2 = (a-1)^2 + (b+2)^2 ,$$

$$a^2 - 10a + 25 + b^2 - 12b + 36 = a^2 - 2a + 1 + b^2 + 4b + 4 ,$$

整理すると、 $-8a - 16b = -56$, $a = 7 - 2b$. 点 $(a, b) = (7 - 2b, b)$ と点 $(1, -2)$ との間の距離が 5 なので、

$$(7 - 2b - 1)^2 + (b + 2)^2 = 25 ,$$

$$4b^2 - 24b + 36 + b^2 + 4b + 4 = 25 ,$$

$$b^2 - 4b + 3 = 0 ,$$

$b = 1$ または $b = 3$. $a = 7 - 2b$ なので、 $b = 1$ のとき $a = 5$, $b = 3$ のとき $a = 1$. 故に円 C の中心は $(1, 3)$ または $(5, 1)$ である。 **終**

問7.2.4 座標平面において、点 $(1, -4)$ と点 $(7, 8)$ とが属し半径が $5\sqrt{2}$ である円 C の中心を求めよ.

定数 a, b に対して、点 (a, b) が円 C の中心であるとする. 点 (a, b) は点 $(1, -4)$ と点 $(7, 8)$ とから等距離にあるので,

$$\begin{aligned}(a-1)^2 + (b+4)^2 &= (a-7)^2 + (b-8)^2 . \\ -2a + 1 + 8b + 16 &= -14a + 49 - 16b + 64 . \\ 12a + 24b &= 96 ,\end{aligned}$$

よって $a = 8 - 2b$. 点 $(a, b) = (8 - 2b, b)$ と点 $(1, -4)$ との間の距離が $5\sqrt{2}$ なので,

$$\begin{aligned}(8 - 2a + 8 - 1)^2 + (b + 4)^2 &= 50 , \\ 4b^2 - 28b + 49 + b^2 + 8b + 16 - 50 &= 0 , \\ b^2 - 4b + 3 &= 0 ,\end{aligned}$$

$a = 1$ または $a = 3$. 故に円 C の中心は $(2, 3)$ または $(6, 1)$ である. **終**

変数 x と y に関する2次方程式は,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c \quad (a, b, c \text{ は定数で } c \geq 0)$$

の形に同値変形できれば, 定理 7.2 により, xy 座標平面において点 (a, b) が中心であり半径が $\sqrt{c}$ である円を表します. この形に変形するために2次式の平方完成を用います.

$$x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2.$$

例 xy 座標平面において方程式 $3x^2 + 3y^2 - 8x + 5y = -2$ が表す図形は円であることを示し、その中心と半径とを求める．まず方程式 $3x^2 + 3y^2 - 8x + 5y = -2$ の両辺を x^2 及び y^2 の係数の 3 で割る；

$$x^2 + y^2 - \frac{8}{3}x + \frac{5}{3}y = -\frac{2}{3} ,$$

$$x^2 - \frac{8}{3}x + y^2 + \frac{5}{3}y = -\frac{2}{3} .$$

x の係数 $-\frac{8}{3} = -2 \cdot \frac{4}{3}$ の絶対値の $\frac{1}{2}$ の 2 乗 $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ と y の係数 $\frac{5}{3} = 2 \cdot \frac{5}{6}$ の絶対値の $\frac{1}{2}$ の 2 乗 $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ とを両辺に足す：

$$x^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{5}{6}y + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{2}{3} + \frac{16}{9} + \frac{25}{36} ,$$

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{65}{36} .$$

これらの変形は同値変形である：

$$3x^2 + 3y^2 - 8x + 5y = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{65}{36} .$$

方程式 $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{65}{36}$ が表す図形は中心が点 $\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{6}\right)$ であり半径が $\sqrt{\frac{65}{36}} = \frac{\sqrt{65}}{6}$ である円である．故に，方程式 $3x^2 + 3y^2 - 8x + 5y = 1$ が表す図形は円であり，その中心は $\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{6}\right)$ であり半径は $\frac{\sqrt{65}}{6}$ である．終

問7.2.5 xy 座標平面において方程式 $5x^2 + 5y^2 + 8x - 6y = 2$ が表す図形は円であることを示し、その中心と半径とを求めよ.

$$5x^2 + 5y^2 + 8x - 6y = 2 ,$$

$$x^2 + \frac{8}{5}x + y^2 - \frac{6}{5}y = \frac{2}{5} ,$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{4}{5}x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{16}{25} + y^2 - 2 \cdot \frac{3}{5}y + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{9}{25} = \frac{2}{5} ,$$

$$\left(x + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{10 + 16 + 9}{25} ,$$

$$\left(x + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{35}{25} .$$