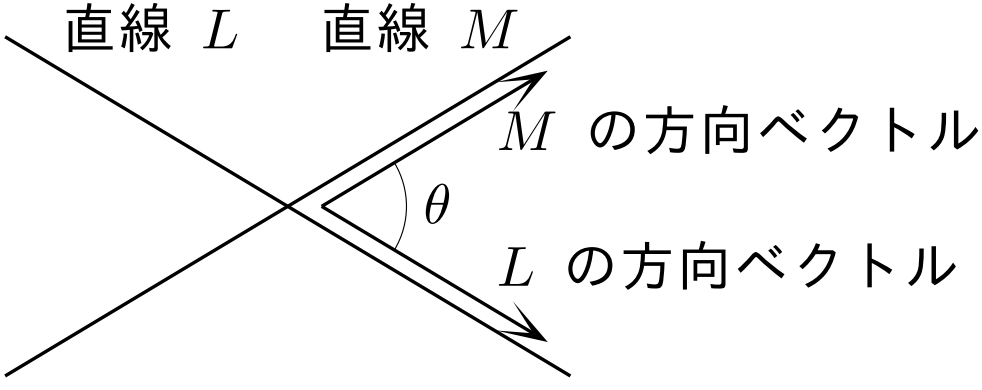
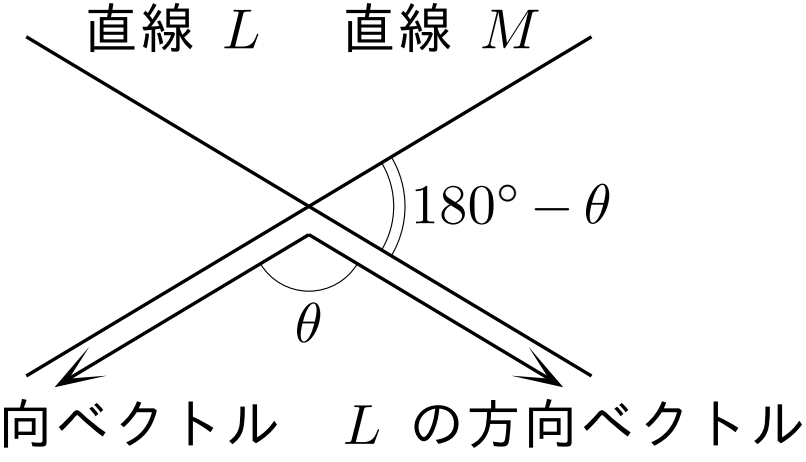
6.4

直線が成す角度・平面が成す角度

座標空間において，直線 L の方向ベクトルと M の方向ベクトルとが成す角度 θ に対して，$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ のときは L と M とが成す角度は θ であり，$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ のときは L と M とが成す角度は $180^\circ - \theta$ である．直線 L と直線 M との共有点が無くても L と M とが成す角度は唯一つに決まる．





例 xyz 座標空間において方程式 $x-6=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z-8}{9}$ が表す直線と方程式 $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y-2}{5}=-\dfrac{z-7}{8}$ が表す直線とが成す角度 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) を求める.

方程式 $x-6=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z-8}{9}$ が表す直線の方向ベクトル $(1,4,9)$ と方程式 $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y-2}{5}=-\dfrac{z-7}{8}$ が表す直線の方向ベクトル $(3,5,-8)$ とが成す角度を η ($0^\circ \leq \eta \leq 180^\circ$) とおくと,

$$\cos\eta = \frac{(1,4,9)\cdot(3,5,-8)}{|(1,4,9)||(3,5,-8)|} = \frac{-49}{\sqrt{98}\sqrt{98}} = -\frac{1}{2}\ ,$$

よって $\eta = 120^\circ$. 故に方程式 $x-6=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z-8}{9}$ が表す直線と方程式 $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y-2}{5}=-\dfrac{z-7}{8}$ が表す直線とが成す角度は $180^\circ-\eta=60^\circ$ である.

終

問6.4.1 xyz 座標空間において方程式 $x-8=\dfrac{y-9}{5}=\dfrac{z-7}{4}$ が表す直線と方程式 $x-6=-\dfrac{y-5}{2}=-\dfrac{z-4}{3}$ が表す直線とが成す角度 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) を求めよ.

方程式 $x-8=\dfrac{y-9}{5}=\dfrac{z-7}{4}$ が表す直線の方向ベクトル $(1,4,5)$ と方程式 $x-6=-\dfrac{y-5}{2}=-\dfrac{z-4}{3}$ が表す直線の方向ベクトル $(1,-2,-3)$ とが成す角度を η ($0^\circ \leq \eta \leq 180^\circ$) とおくと,

$$\cos\eta = \frac{(1,5,4)\cdot(1,-2,-3)}{|(1,5,4)||(1,-2,-3)|} = \frac{-21}{\sqrt{42}\sqrt{14}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

よって $\eta = 150^\circ$. 故に方程式 $x-8=\dfrac{y-9}{5}=\dfrac{z-7}{4}$ が表す直線と方程式 $x-6=-\dfrac{y-5}{2}=-\dfrac{z-4}{3}$ が表す直線とが成す角度は $180^\circ-\eta=30^\circ$ である.

終

3 次元座標空間において，平面 Π の法線ベクトルと平面 Λ の法線ベクトルとが成す角度 θ に対して，$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ のときは Π と Λ とが成す角度は θ であり，$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ のときは Π と Λ とが成す角度は $180^\circ - \theta$ である．平面 Π と平面 Λ とが成す角度は唯一つに決まる．

例　xyz 座標空間において方程式 $2x+y+2z=7$ が表す平面と方程式 $4x-y+z=5$ が表す平面とが成す角度 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) を求めよ.

方程式 $2x+y+2z=7$ が表す平面の法線ベクトル $(2,1,2)$ と方程式 $4x-y+z=5$ が表す平面の法線ベクトル $(4,-1,1)$ とが成す角度を η ($0^\circ \leq \eta \leq 180^\circ$) とおくと,

$$\cos\eta = \frac{(2,1,2)\cdot(4,-1,1)}{|(2,1,2)||(4,-1,1)|} = \frac{9}{\sqrt{9}\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ,$$

よって $\eta = 45^\circ$. 方程式 $2x+y+2z=7$ が表す平面と方程式 $4x-y+z=5$ が表す平面とが成す角度は 45° である.　終

問6.4.2　xyz 座標空間において方程式 $2x+y+7z=9$ が表す平面と方程式 $5x-2y-5z=3$ が表す平面とが成す角度 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) を求めよ.

方程式 $2x+y+7z=9$ が表す平面の法線ベクトル $(2,1,7)$ と方程式 $5x-2y-5z=3$ が表す平面の法線ベクトル $(5,-2,-5)$ とが成す角度を η ($0^\circ \leq \eta \leq 180^\circ$) とおくと,

$$\cos\eta = \frac{(2,1,7)\cdot(5,-2,-5)}{|(2,1,7)||(5,-2,-5)|} = \frac{-27}{\sqrt{54}\sqrt{54}} = -\frac{1}{2} \ ,$$

よって $\eta = 120^\circ$. 方程式 $2x+y+7z=9$ が表す平面と方程式 $5x-2y-5z=3$ が表す平面とが成す角度は $180^\circ - \eta = 60^\circ$ である. 終