

6.3

ベクトルが成す角度とベクトルの向き

[定理 6.3.1] ベクトル空間の各ベクトル a と b について, $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき,

a と b とが同じ向きである $\Leftrightarrow a$ と b とが成す角度が 0° である ,
 a と b とが逆の向きである $\Leftrightarrow a$ と b とが成す角度が 180° である .

[証明] a と b とが成す角度を θ とおく. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. 定理 6.1 により $a \cdot b = |a||b| \cos \theta$, $|a| \neq 0$ かつ $|b| \neq 0$ なので $|a||b| \neq 0$. 定理 4.2.2 により,

$$\begin{aligned} a \text{ と } b \text{ とが同じ向きである} &\Leftrightarrow a \cdot b = |a||b| \\ &\Leftrightarrow |a||b| \cos \theta = |a||b| \Leftrightarrow \cos \theta = 1 \\ &\Leftrightarrow \theta = 0^\circ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \text{ と } b \text{ とが逆の向きである} &\Leftrightarrow a \cdot b = -|a||b| \\ &\Leftrightarrow |a||b| \cos \theta = -|a||b| \Leftrightarrow \cos \theta = -1 \\ &\Leftrightarrow \theta = 180^\circ . \end{aligned}$$

[定理 6.3.2] ベクトル空間の各ベクトル a と b について, $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき,

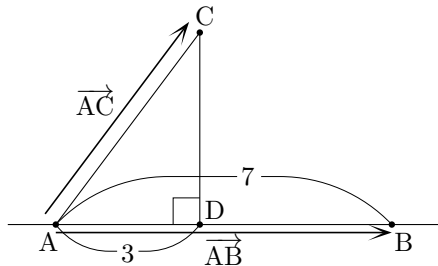
a と b とが垂直である $\Leftrightarrow a$ と b とが成す角度が 90° である .

[証明] a と b とが成す角度を θ とおく. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. 定理 6.1 により $a \cdot b = |a||b| \cos \theta$, $|a| \neq 0$ かつ $|b| \neq 0$ なので $|a||b| \neq 0$.

$$\begin{aligned} a \perp b &\Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow |a||b| \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta = 90^\circ . \end{aligned}$$

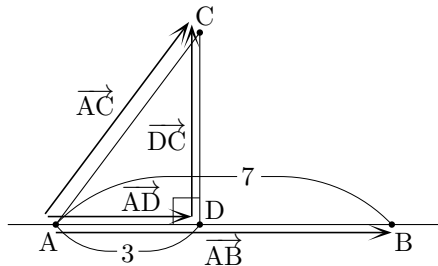
終

例 座標空間における点 A, B, C について, $\overline{AB} = 7$ で, C から直線 AB に下した垂線の足を D とおくと, $\overline{AD} = 3$ で D が線分 AB に属すとする. ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ との内積を求める.



例 座標空間における点 A, B, C について, $\overline{AB} = 7$ で, C から直線 AB に下した垂線の足を D とおくと, $\overline{AD} = 3$ で D が線分 AB に属すとする. ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ との内積を求める.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}.$$

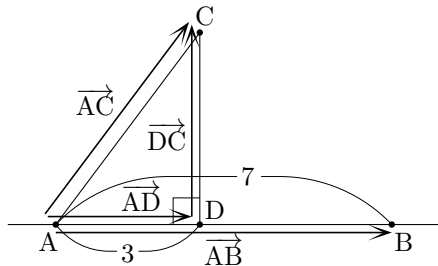


例 座標空間における点 A, B, C について, $\overline{AB} = 7$ で, C から直線 AB に下した垂線の足を D とおくと, $\overline{AD} = 3$ で D が線分 AB に属すとする. ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ との内積を求める.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}.$$

$\angle BAD = 0^\circ$ なので, ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ とは同じ向きである. 定理 4.4.2 により,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| = 7 \cdot 3 = 21.$$



[定理 4.2.2] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について,

$$a \text{ と } b \text{ とが同じ向きである} \Leftrightarrow a \cdot b = |a| |b|,$$

$$a \text{ と } b \text{ とが逆の向きである} \Leftrightarrow a \cdot b = -|a| |b|.$$

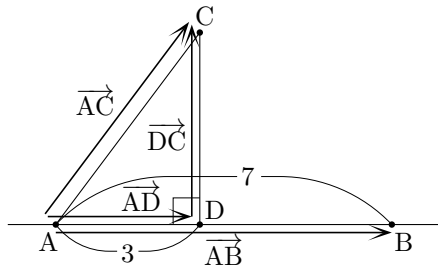
例 座標空間における点 A, B, C について, $\overline{AB} = 7$ で, C から直線 AB に下した垂線の足を D とおくと, $\overline{AD} = 3$ で D が線分 AB に属すとする. ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ との内積を求める.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}.$$

$\angle BAD = 0^\circ$ なので, ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ とは同じ向きである. 定理 4.4.2 により,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| = 7 \cdot 3 = 21.$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DC} \text{ なので } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0.$$



例 座標空間における点 A, B, C について, $\overline{AB} = 7$ で, C から直線 AB に下した垂線の足を D とおくと, $\overline{AD} = 3$ で D が線分 AB に属すとする. ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ との内積を求める.

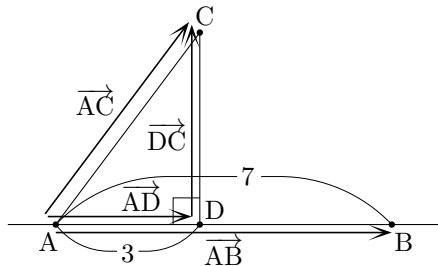
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}.$$

$\angle BAD = 0^\circ$ なので, ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ とは同じ向きである. 定理 4.4.2 により,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| = 7 \cdot 3 = 21.$$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DC}$ なので $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$. よって

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 21.$$



問4.2.1 座標空間における点 A, B, C について, $\overline{AB} = 3$ で, C から直線 AB に下した垂線の足を D とおくと, $\overline{AD} = 5$ で A が線分 BD に属すとする. ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ との内積を求めよ.

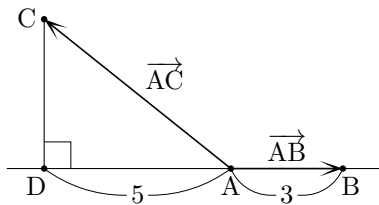
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}.$$

$\angle BAD = 180^\circ$ なので, ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ とは逆の向きである.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= -|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| = -(3 \cdot 5) \\ &= -15.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DC}$ なので $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$. よって

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = -15.$$



終