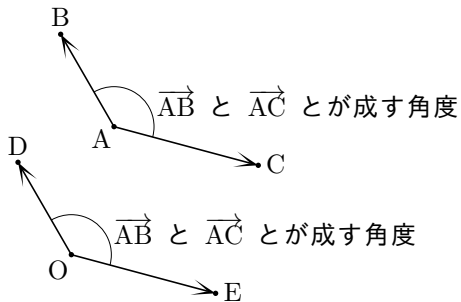


6.2

ベクトルが成す角度と図形

[定理 6.2.1] 座標空間の各点 A, B, C について, $A \neq B$ かつ $A \neq C$ のとき, ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ とが成す角度は角 BAC の劣角 $\angle BAC$ である.

証明 座標空間の点 A と B と C について, $A \neq B$ かつ $A \neq C$ とする. 原点を O とおく. ベクトル $\overrightarrow{AO}$ による平行移動で, 点 A は原点 O に移る. ベクトル $\overrightarrow{AO}$ による平行移動で, 点 B が移る点を D とおき, 点 C が移る点を E とおく. D の位置ベクトルは $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}$ で, E の位置ベクトルは $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AC}$ なので, ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ とが成す角度は $\angle DOE$ である. 角 DOE は角 BAC を平行移動したものなので $\angle DOE = \angle BAC$. よって, $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ とが成す角度は $\angle BAC$ である.



証明終了

例 座標空間の3点 A と B と C について, $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 7$, $\angle BAC = 120^\circ$ とする. ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ との内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ を求める. 定理 6.2.1 よりベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ とが成す角度は $\angle BAC = 120^\circ$ なので, 定理 6.1 により,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 120^\circ .$$

ここで, $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB} = 5$, $|\overrightarrow{AC}| = \overline{AC} = 7$, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ なので,

$$|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 120^\circ = 5 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{35}{2} .$$

よって $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{35}{2}$.

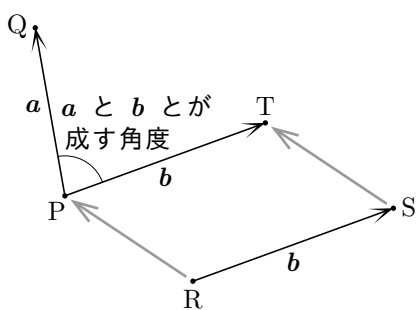
終

問6.2.1 座標空間の3点 P と Q と R について, $\overline{QP} = 7$, $\overline{QR} = 5$, $\angle PQR = 150^\circ$ とする. ベクトル $\overrightarrow{QP}$ と $\overrightarrow{QR}$ との内積 $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$ を求めよ.

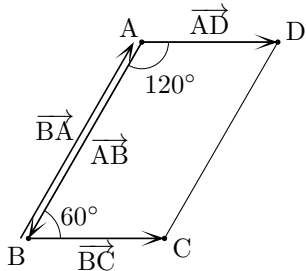
$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} &= \overline{QP} \cdot \overline{QR} \cos \angle PQR = 7 \cdot 5 \cdot \cos 150^\circ = 35 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -\frac{35}{2}\sqrt{3} .\end{aligned}$$

終

座標空間の点 P と Q と R と S について、ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS}$ とが成す角度を考える．右図のように、点 R が点 P に移るような平行移動によって、点 S が点 T に移るとする．定理 1.4.1 より $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PT}$ なので、 $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PT}$ とが成す角度は定理 6.2.1 より $\angle QPT$ である．



例 座標空間の相異なる 3 点 A と B と C について、 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 3$, $\angle ABC = 60^\circ$ とする．ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ との内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ を求める．点 D を，四角形 ABCD が平行四辺形になるようにとる． $\angle ABC = 60^\circ$ なので， $\angle BAD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ． $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ とが成す角度は 135° である．よって，



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos 120^\circ = 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{2} .$$

次のように考えてもよい．ベクトル $\overrightarrow{BA}$ と $\overrightarrow{BC}$ とが成す角度は 60° なので，

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overline{BA} \cdot \overline{BC} \cdot \cos 60^\circ = 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2} .$$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ なので，

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{15}{2} .$$

問6.2.2 座標空間の点 A と B と C について, $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 7$, $\angle ABC = 45^\circ$ とする. ベクトル $\overrightarrow{CB}$ と $\overrightarrow{BA}$ との内積 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA}$ を求めよ.

ベクトル $\overrightarrow{BA}$ と $\overrightarrow{BC}$ とが成す角度が 45° なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA} &= -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overline{BCBA} \cos 45^\circ = -7 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{35}{2} \sqrt{2} .\end{aligned}$$

終

【例】座標空間の相異なる3点 A, B, C について, 三角形 ABC は正三角形であり, その各辺の長さが 10 であるとする. 線分 AB の中点を D とおき, 線分 AC の中点を E とおく. ベクトルの内積 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB}$ 及び $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA}$ を計算する. 正三角形 ABC の各辺の長さが 10 なので,

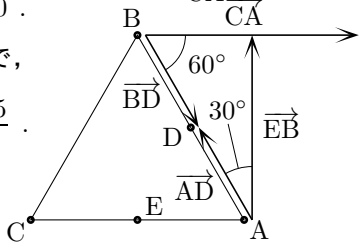
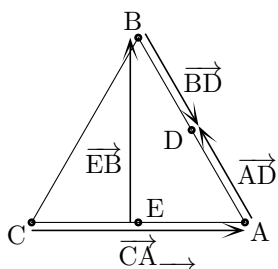
$$\overline{AD} = 5, \quad \overline{EB} = 5\sqrt{3}, \quad \overline{BD} = 5, \quad \overline{CA} = 10.$$

ベクトル $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{EB}$ とが成す角度は 30° なので,

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB} = \overline{AD} \cdot \overline{EB} \cdot \cos 30^\circ = 5 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75}{2}.$$

ベクトル $\overrightarrow{BD}$ と $\overrightarrow{CA}$ とが成す角度は 60° なので,

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA} = \overline{BD} \cdot \overline{CA} \cdot \cos 60^\circ = 5 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 25.$$



問6.2.3 座標空間の相異なる 3 点 A と B と C について、三角形 ABC は正三角形であり、その各辺の長さが 10 であるとする．線分 AB の中点を D とおき、線分 AC の中点を E とおく．ベクトルの内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE}$ 及び $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD}$ を計算せよ．

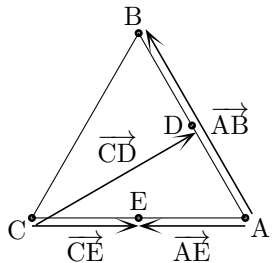
$\overline{AB} = 10$, $\overline{CE} = 5$, ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CE}$ とが成す角度は 120° .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = \overline{ABCE} \cos 120^\circ = 10 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -25 .$$

$\overline{AE} = 5$, $\overline{CD} = 5\sqrt{3}$, ベクトル $\overrightarrow{AE}$ と $\overrightarrow{CD}$ とが成す角度は 150° .

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{AECD} \cos 150^\circ = 5 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{75}{2} .$$

終



定理 6.1 と定理 6.2.1 とより次の定理が導かれる.

[定理 6.2.2] 座標空間の各点 A と B と C について, $A \neq B$ かつ $B \neq C$ のとき, 角 ABC の劣角 $\angle ABC$ について,

$$\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} .$$

[証明] $A \neq B$ かつ $B \neq C$ とする. 定理 6.2.1 より, 角 ABC の劣角 $\angle ABC$ はベクトル $\overrightarrow{BA}$ と $\overrightarrow{BC}$ とが成す角度なので, 定理 6.1 により,

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos \angle ABC .$$

$A \neq B$ より $|\overrightarrow{BA}| \neq 0$, $B \neq C$ より $|\overrightarrow{BC}| \neq 0$ なので, $\cos \angle ABC =$

$$\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} .$$

証明終了

例 座標平面の点 $A = (8, 4\sqrt{3})$ と $B = (7, 2\sqrt{3})$ と $C = (2, 5\sqrt{3})$ とに対して、角 ABC の劣角 $\angle ABC$ を求める.

定理 6.2.2 より,

$$\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|}$$

例 座標平面の点 $A = (8, 4\sqrt{3})$ と $B = (7, 2\sqrt{3})$ と $C = (2, 5\sqrt{3})$ とに対して、角 ABC の劣角 $\angle ABC$ を求める． $\overrightarrow{BA} = (8, 4\sqrt{3}) - (7, 2\sqrt{3}) = (1, 2\sqrt{3})$,
 $\overrightarrow{BC} = (2, 5\sqrt{3}) - (7, 2\sqrt{3}) = (-5, 3\sqrt{3})$ なので、

定理 6.2.2 より、

$$\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|}$$

例 座標平面の点 $A = (8, 4\sqrt{3})$ と $B = (7, 2\sqrt{3})$ と $C = (2, 5\sqrt{3})$ とに対して、角 ABC の劣角 $\angle ABC$ を求める． $\overrightarrow{BA} = (8, 4\sqrt{3}) - (7, 2\sqrt{3}) = (1, 2\sqrt{3})$,
 $\overrightarrow{BC} = (2, 5\sqrt{3}) - (7, 2\sqrt{3}) = (-5, 3\sqrt{3})$ なので、

$$|\overrightarrow{BA}| = |(1, 2\sqrt{3})| = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13} \ ,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = |(-5, 3\sqrt{3})| = \sqrt{(-5)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \ ,$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (1, 2\sqrt{3}) \cdot (-5, 3\sqrt{3}) = -5 + 18 = 13 \ .$$

定理 6.2.2 より、

$$\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|}$$

例 座標平面の点 $A = (8, 4\sqrt{3})$ と $B = (7, 2\sqrt{3})$ と $C = (2, 5\sqrt{3})$ とに対して、角 ABC の劣角 $\angle ABC$ を求める． $\overrightarrow{BA} = (8, 4\sqrt{3}) - (7, 2\sqrt{3}) = (1, 2\sqrt{3})$,
 $\overrightarrow{BC} = (2, 5\sqrt{3}) - (7, 2\sqrt{3}) = (-5, 3\sqrt{3})$ なので、

$$|\overrightarrow{BA}| = |(1, 2\sqrt{3})| = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13} \ ,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = |(-5, 3\sqrt{3})| = \sqrt{(-5)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \ ,$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (1, 2\sqrt{3}) \cdot (-5, 3\sqrt{3}) = -5 + 18 = 13 \ .$$

定理 6.2.2 より、

$$\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{1}{2} \ .$$

例 座標平面の点 $A = (8, 4\sqrt{3})$ と $B = (7, 2\sqrt{3})$ と $C = (2, 5\sqrt{3})$ とに対して、角 ABC の劣角 $\angle ABC$ を求める． $\overrightarrow{BA} = (8, 4\sqrt{3}) - (7, 2\sqrt{3}) = (1, 2\sqrt{3})$,
 $\overrightarrow{BC} = (2, 5\sqrt{3}) - (7, 2\sqrt{3}) = (-5, 3\sqrt{3})$ なので、

$$|\overrightarrow{BA}| = |(1, 2\sqrt{3})| = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13} \ ,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = |(-5, 3\sqrt{3})| = \sqrt{(-5)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \ ,$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (1, 2\sqrt{3}) \cdot (-5, 3\sqrt{3}) = -5 + 18 = 13 \ .$$

定理 6.2.2 より、

$$\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{1}{2} \ .$$

従って $\cos \angle ABC = \frac{1}{2}$, $0^\circ \leq \angle ABC \leq 180^\circ$ なので $\angle ABC = 60^\circ$.

終

問6.2.4 座標平面の点 $P = (\sqrt{3}, 6)$ と $Q = (4\sqrt{3}, 5)$ と $R = (5\sqrt{3}, 7)$ と
に対して、角 PQR の劣角 $\angle PQR$ を求めよ.

$\overrightarrow{QP} = (\sqrt{3}, 6) - (4\sqrt{3}, 5) = (-3\sqrt{3}, 1)$, $\overrightarrow{QR} = (5\sqrt{3}, 7) - (4\sqrt{3}, 5) = (\sqrt{3}, 2)$ なので,

$$|\overrightarrow{QP}| = |(-3\sqrt{3}, 1)| = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} ,$$

$$|\overrightarrow{QR}| = |(\sqrt{3}, 2)| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 2^2} = \sqrt{7} ,$$

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = (-3\sqrt{3}, 1) \cdot (\sqrt{3}, 2) = -9 + 2 = -7 .$$

よって

$$\cos \angle PQR = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}| |\overrightarrow{QR}|} = \frac{-7}{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = -\frac{1}{2} .$$

$0^\circ \leq \angle ABC \leq 180^\circ$ なので $\angle ABC = 120^\circ$.

終

例 3次元座標空間の点 $A = (7, 8, 6)$ と $B = (6, 9, 2)$ と $C = (8, 4, 7)$ とに対して、角 ABC の劣角 $\angle ABC$ を求める．定理 6.2.2 より、

$$\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} .$$

$\overrightarrow{BA} = (7, 8, 6) - (6, 9, 2) = (1, -1, 4)$, $\overrightarrow{BC} = (8, 4, 7) - (6, 9, 2) = (2, -5, 5)$ なので、

$$|\overrightarrow{BA}| = |(1, -1, 4)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} ,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = |(2, -5, 5)| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} ,$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (1, -1, 4) \cdot (2, -5, 5) = 2 + 5 + 20 = 27 .$$

よって

$$\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{27}{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

従って $\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0^\circ \leq \angle ABC \leq 180^\circ$ なので $\angle ABC = 30^\circ$.

終

問6.2.5 3次元座標空間の点 $A = (8, 7, -1)$ と $B = (7, 4, 3)$ と $C = (9, -3, 8)$ とに対して, 角 ABC の劣角 $\angle ABC$ を求めよ.
 $\overrightarrow{BA} = (8, 7, -1) - (7, 4, 3) = (1, 3, -4)$, $\overrightarrow{BC} = (9, -3, 8) - (7, 4, 3) = (2, -7, 5)$
 なので,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BA}| &= |(1, 3, -4)| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{26} \text{ ,} \\ |\overrightarrow{BC}| &= |(2, -7, 5)| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + 5^2} = \sqrt{78} \text{ ,} \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= (1, 3, -4) \cdot (2, -7, 5) = 2 - 21 - 20 = -39 \text{ .} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-39}{\sqrt{26} \sqrt{78}} = -\frac{39}{\sqrt{26} \sqrt{26 \cdot 3}} = -\frac{39}{26\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ .}$$

従って $\cos \angle ABC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $0^\circ \leq \angle ABC \leq 180^\circ$ なので $\angle ABC = 150^\circ$. 終

例 次のような実数 x を求める：座標平面における点 $A = (-2, 0)$ と $B = (0, \sqrt{3})$ と $P = (x, 0)$ について，角 APB の劣角は $\angle ABP$ は 60° である．定理 6.2.2 より，

$$\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BP}|} = \cos \angle ABP = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} .$$

$\overrightarrow{BA} = (-2, 0) - (0, \sqrt{3}) = (-2, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BP} = (x, 0) - (0, \sqrt{3}) = (x, -\sqrt{3})$
なので，

$$\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BP}|} = \frac{(-2, -\sqrt{3}) \cdot (x, -\sqrt{3})}{\sqrt{(-2)^2 + (-\sqrt{3})^2} \sqrt{x^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{3 - 2x}{\sqrt{7} \sqrt{x^2 + 3}} .$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{3 - 2x}{\sqrt{7} \sqrt{x^2 + 3}} &= \frac{1}{2} , \\ 2(3 - 2x) &= \sqrt{7} \sqrt{x^2 + 3} , \end{aligned}$$

$$4(4x^2 - 12x + 9) = 7(x^2 + 3) \ ,$$

$$9x^2 - 48x + 15 = 0 \ ,$$

$$3x^2 - 16x + 5 = 0 \ ,$$

$$(x - 5)(3x - 1) = 0 \ ,$$

$$x = 5 \quad \text{または} \quad x = \frac{1}{3} \ .$$

$$x = 5 \quad \text{のとき} \quad \frac{3 - 2x}{\sqrt{7}\sqrt{x^2 + 3}} \neq \frac{1}{2} \ . \quad x = \frac{1}{3} \quad \text{のとき} \quad \frac{3 - 2x}{\sqrt{7}\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{1}{2} \ . \quad \text{よって}$$

$$x = \frac{1}{3} \ .$$

終

問6.2.6 次のような実数 y を求めよ：座標平面における点 $A = (0, 3)$ と $B = (1, 0)$ と $P = (0, y)$ について，角 ABP の劣角 $\angle APB$ は 45° である．

$$\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BP}|} = \cos \angle ABP = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

$\overrightarrow{BA} = (0, 3) - (1, 0) = (-1, 3)$, $\overrightarrow{BP} = (0, y) - (1, 0) = (-1, y)$ なので，

$$\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BP}|} = \frac{(-1, 3) \cdot (-1, y)}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2} \sqrt{(-1)^2 + y^2}} = \frac{3y + 1}{\sqrt{10} \sqrt{y^2 + 1}} .$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{3y + 1}{\sqrt{10} \sqrt{y^2 + 1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} , \\ \sqrt{2}(3y + 1) &= \sqrt{10} \sqrt{y^2 + 1} , \\ 2(3y + 1)^2 &= 10(y^2 + 1) , \\ 8y^2 + 12y - 8 &= 0 , \end{aligned}$$

$$2y^2 + 3y - 2 = 0 \ ,$$

$$(y + 2)(2y - 1) = 0 \ ,$$

$$y = -2 \quad \text{または} \quad y = \frac{1}{2} \ .$$

$$y = -2 \quad \text{のとき} \quad \frac{3y + 1}{\sqrt{10}\sqrt{y^2 + 1}} \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \quad y = \frac{1}{2} \quad \text{のとき} \quad \frac{3y + 1}{\sqrt{10}\sqrt{y^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

$$\text{よって} \quad y = \frac{1}{2} \ .$$

終