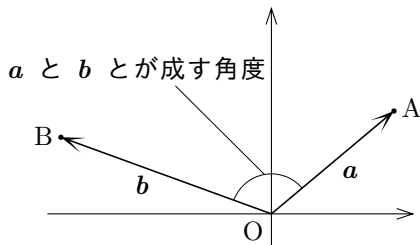


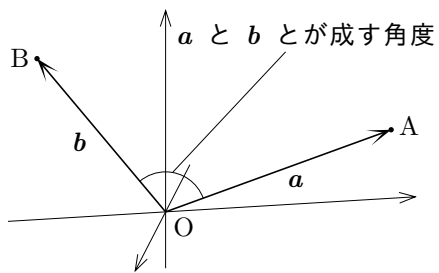
6.1

ベクトルが成す角度

[定義] ベクトル平面 $\mathbf{R}^2$ のベクトル a と b について $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ とする. 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の原点を O とおく. a を位置ベクトルとする点を A とおき, b を位置ベクトルとする点を B とおく; このとき, ベクトル a と b とが成す角度とは角 AOB の劣角 $\angle AOB$ のことである.



[定義] 3次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル a と b について $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ とする. 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の原点を O とおく. a を位置ベクトルとする点を A とおき, b を位置ベクトルとする点を B とおく; このとき, ベクトル a と b とが成す角度とは角 AOB の劣角 $\angle AOB$ のことである.



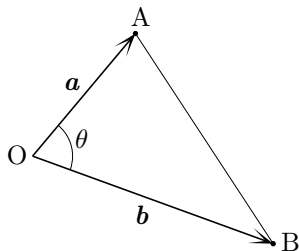
つまり、ベクトル a と b とが成す角度とは、原点 O と、 a を位置ベクトルとする点 A と、 b を位置ベクトルとする点 B とからできる角 AOB の劣角のことである．劣角なので 0° 以上 180° 以下である．

[定理 6.1] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について, $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき, a と b とが成す角度を θ とおくと,

$$a \cdot b = |a||b| \cos \theta .$$

[証明] 実ベクトル空間のベクトル a と b について $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ とする. 座標空間において, 右の図のように, 原点を O とおき, ベクトル a を位置ベクトルとする点を A とおき, ベクトル b を位置ベクトルとする点を B とおく. a と b とが成す角度 θ は角 AOB の劣角 $\angle AOB$ である. 三角形 OAB において, 余弦定理により

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA} \overline{OB} \cos \theta .$$



三角形 OAB において、余弦定理により

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA}\overline{OB}\cos\theta .$$

$\overrightarrow{AB} = b - a$ なので $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = |b - a|$.

$\overrightarrow{OA} = a$ なので $\overline{OA} = |\overrightarrow{OA}| = |a|$. $\overrightarrow{OB} = b$

なので $\overline{OB} = |\overrightarrow{OB}| = |b|$. よって

$$|b - a|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta .$$

この等式の左辺は定理 2.8.1 及び定理 3.8.1 より

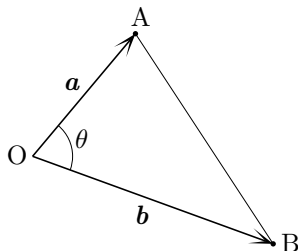
$$|b - a|^2 = (b - a) \cdot (b - a) = b \cdot b - 2b \cdot a + a \cdot a = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 ,$$

従って,

$$|a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta ,$$

$$-2a \cdot b = -2|a||b|\cos\theta ,$$

故に $a \cdot b = |a||b|\cos\theta$.



証明終了

例 実ベクトル a と b について, $|a| = 3$ かつ $|b| = 5$ で, a と b とが成す角度が 150° であるとする. $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. a と b との内積 $a \cdot b$ は

$$a \cdot b = |a||b| \cos 150^\circ = 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{15}{2}\sqrt{3} . \quad \text{終}$$

問6.1.1 実ベクトル a と b について, $|a| = 5$ かつ $|b| = 7$ で, a と b とが成す角度が 120° であるとする. a と b との内積 $a \cdot b$ を計算せよ.

$$a \cdot b = |a||b| \cos 120^\circ = 5 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{35}{2} .$$

終

例 実ベクトル a と b について、 $|a|=3$ かつ $|b|=5$ で、 a と b とが成す角度が 60° であるとする．ベクトル $2a-b$ と $4a+3b$ との内積を計算する．

$$\begin{aligned}(2a-b) \cdot (4a+3b) &= 2a \cdot 4a + 2a \cdot 3b - b \cdot 4a - b \cdot 3b \\&= 8a \cdot a + 6a \cdot b - 4a \cdot b - 3b \cdot b \\&= 8|a|^2 + 2a \cdot b - 3|b|^2 ,\end{aligned}$$

ここで、 $|a|=3$, $|b|=5$, 更に

$$a \cdot b = |a||b| \cos 60^\circ = 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2} ,$$

よって

$$8|a|^2 + 2a \cdot b - 3|b|^2 = 8 \cdot 3^2 + 2 \cdot \frac{15}{2} - 3 \cdot 5^2 = 72 + 15 - 75 = 13 .$$

よって $(2a-b) \cdot (4a+3b) = 13$.

終

問6.1.2 実ベクトル a と b について、 $|a| = \sqrt{3}$ かつ $|b| = 4$ で、 a と b とが成す角度が 30° であるとする．ベクトル $3a + 4b$ と $5a - 2b$ との内積を計算せよ．

$|a| = \sqrt{3}$, $|b| = 4$ なので,

$$a \cdot b = |a||b|\cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 ,$$

よって

$$\begin{aligned}(3a + 4b) \cdot (5a - 2b) &= 15a \cdot a - 6a \cdot b + 20b \cdot a - 8b \cdot b \\&= 15|a|^2 + 14a \cdot b - 8|b|^2 \\&= 15 \cdot \sqrt{3}^2 + 14 \cdot 6 - 8 \cdot 4^2 = 45 + 84 - 128 \\&= 1 .\end{aligned}$$

終

例 実ベクトル a と b について、 $|a|=4$ かつ $|b|=3$ で、 a と b とが成す角度が 120° であるとする．ベクトル $3a+2b$ の大きさを計算する．

$$\begin{aligned}|3a+2b|^2 &= (3a+2b) \cdot (3a+2b) = 3a \cdot 3a + 3a \cdot 2b + 2b \cdot 3a + 2b \cdot 2b \\&= 9a \cdot a + 6a \cdot b + 6a \cdot b + 4b \cdot b \\&= 9|a|^2 + 12a \cdot b + 4|b|^2 ,\end{aligned}$$

ここで、 $|a|=4$, $|b|=3$, 更に

$$a \cdot b = |a||b| \cos 120^\circ = 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6 ,$$

よって

$$9|a|^2 + 12a \cdot b + 4|b|^2 = 9 \cdot 4^2 + 12 \cdot (-6) + 4 \cdot 3^2 = 144 - 72 + 24 = 96 .$$

これより $|3a+2b|^2 = 96$ なので、 $|3a+2b| = \sqrt{96}$.

終

問6.1.3 実ベクトル a と b について、 $|a| = 2\sqrt{2}$ かつ $|b| = \sqrt{6}$ で、 a と b とが成す角度が 150° であるとする．ベクトル $3a + 5b$ の大きさを計算瀬よ．

$$|a| = 2\sqrt{2} \quad , \quad |b| = \sqrt{6} \quad \text{なので,}$$

$$a \cdot b = |a||b|\cos 150^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6 \quad .$$

よって

$$\begin{aligned} |3a + 5b|^2 &= (3a + 5b) \cdot (3a + 5b) = 9|a|^2 + 30a \cdot b + 25|b|^2 \\ &= 72 - 180 + 150 \\ &= 42 \quad . \end{aligned}$$

終

例 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (\sqrt{3}, 1)$ と $\boldsymbol{b} = (-3, \sqrt{3})$ とが成す角度 θ を求める.

$$|\boldsymbol{a}| = |(\sqrt{3}, 1)| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2 ,$$

$$|\boldsymbol{b}| = |(-3, \sqrt{3})| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} ,$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\sqrt{3}, 1) \cdot (-3, \sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + \sqrt{3} = -2\sqrt{3} .$$

$$|\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \cos \theta = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \quad \text{なので,}$$

$$2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos \theta = -2\sqrt{3} ,$$

$$\cos \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} ,$$

$$0^\circ < \theta < 180^\circ \quad \text{なので} \quad \theta = 120^\circ .$$

終

問6.1.4 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (-3, \sqrt{3})$ と $\boldsymbol{b} = (1, -\sqrt{3})$ とが成す角度 θ を求めよ,

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \ ,$$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{4} = 2 \ ,$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (-3, \sqrt{3}) \cdot (1, -\sqrt{3}) = -6 \ ,$$

$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ なので,

$$2\sqrt{3} \cdot 2\cos\theta = -6 \ ,$$

$$\cos\theta = -\frac{6}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ なので $\theta = 150^\circ$.

終

例 3次元実ベクトル $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$ と $\mathbf{b} = (1, 5, -4)$ とが成す角度 θ を求める.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \ ,$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{42} \ ,$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2, 3, -1) \cdot (1, 5, -4) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + (-1) \cdot (-4) = 21 \ .$$

$|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ なので,

$$\sqrt{14}\sqrt{42}\cos\theta = 21 \ ,$$

$$\cos\theta = \frac{21}{\sqrt{14}\sqrt{42}} = \frac{21}{\sqrt{14}\sqrt{14}\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ なので $\theta = 30^\circ$.

終

問6.1.5 3次元実ベクトル $\mathbf{a} = (1, 7, 2)$ と $\mathbf{b} = (2, 5, -5)$ とが成す角度 θ を求めよ.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-1, 7, 2) \cdot (-2, 5, -5) = 27, \quad |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| = \sqrt{54} \sqrt{54} = 54, \quad \text{よって}$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{27}{54} = \frac{1}{2}.$$

従って $\theta = 60^\circ$.

終

例 平面ベクトル $\boldsymbol{r}$ は単位ベクトルで $\boldsymbol{r}$ と平面ベクトル $(2,1)$ とが成す角度が 45° であるとする．このようなベクトル $\boldsymbol{r}$ を求める． $\boldsymbol{r} = (x, y)$ とおく． $\boldsymbol{r}$ は単位ベクトルなので $|(x, y)| = 1$, $x^2 + y^2 = 1$. 単位ベクトル $\boldsymbol{r}$ ベクトル $(2,1)$ とが成す角度が 45° なので,

$$\boldsymbol{r} \cdot (2,1) = |\boldsymbol{r}| |(2,1)| \cos 45^\circ ,$$

$$2x + y = \sqrt{\frac{5}{2}} .$$

$y = \sqrt{\frac{5}{2}} - 2x$ を $x^2 + y^2 = 1$ に代入する：

$$x^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - 2x \right)^2 = 1 ,$$

$$5x^2 - 2\sqrt{10}x + \frac{3}{2} = 0 ,$$

$$5x^2 - 2\sqrt{10}x + \frac{3}{2} = 0 \ ,$$

$$x = \frac{2\sqrt{10} \pm \sqrt{10}}{10} = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{10}} \ ,$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{または} \quad x = \frac{3}{\sqrt{10}} \ .$$

故に $r = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$ または $r = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}} \right)$.

終

問6.1.6 平面ベクトル $\boldsymbol{r}$ は単位ベクトルで $\boldsymbol{r}$ と平面ベクトル $(1,3)$ とが成す角度が 45° であるとする. このようなベクトル $\boldsymbol{r}$ を求めよ.

$\boldsymbol{r} = (x, y)$ とおく. $\boldsymbol{r}$ は単位ベクトルなので $|(x, y)| = 1$, $x^2 + y^2 = 1$.
単位ベクトル $\boldsymbol{r}$ ベクトル $(1,3)$ とが成す角度が 45° なので,

$$\boldsymbol{r} \cdot (1, 3) = |\boldsymbol{r}| |(1, 3)| \cos 45^\circ ,$$

$$x + 3y = \sqrt{5} .$$

$x = \sqrt{5} - 3y$ を $x^2 + y^2 = 1$ に代入する :

$$y^2 + (\sqrt{5} - 3y)^2 = 1 ,$$

$$10y^2 - 6\sqrt{10}y + 4 = 0 ,$$

$$5y^2 - 3\sqrt{5}x + 2 = 0 ,$$

$$5y^2 - 3\sqrt{5}x + 2 = 0 \ ,$$

$$y = \frac{3\sqrt{5} \pm \sqrt{5}}{10} \ ,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{または} \quad y = \frac{2}{\sqrt{5}} \ .$$

$$\text{故に} \quad r = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \quad \text{または} \quad r = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \ .$$

終