

5.10

3次元座標空間における平面と点との間の距離

[定義] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，点 A と直線 L との間の距離とは，直線 L に属す点の中で最も点 A に近い点 P と点 A との間の距離である．

次の定理の証明は前節の定理の証明と同様なので省く．

[定理] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において点 A は直線 L に属さないとする．点 A から直線 L に下ろした垂線の足を H とおくとき，点 A と直線 L との間の距離は線分 AH の長さ $\overline{AH}$ である．

次の定理の証明は前節の定理 5.9 の証明と同様である.

[定理 5.10] $a, b, c, d, x_0, y_0, z_0$ は定数で $a \neq 0$ または $b \neq 0$ または $c \neq 0$ とする. xyz 座標空間において方程式 $ax + by + cz + d = 0$ が表す平面と点 (x_0, y_0, z_0) との間の距離は $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ である.

[証明] 方程式 $ax + by + cz + d = 0$ が表す平面を Π とおく.

$(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$ のとき, $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ なので $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$, 点 (x_0, y_0, z_0) と平面 Π との間の距離も 0 である.

$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \notin \Pi$ とする. 点 P_0 から直線 L に下ろした垂線の足を $H = (p, q, r)$ とおく. 直線 L と点 P_0 との間の距離は $\overline{P_0H}$ である. 定理 5.4 により方程式 $ax + by + cz + d = 0$ が表す平面 Π の法線ベクトル (a, b, c) と直線 P_0H の方向ベクトル $\overrightarrow{P_0H}$ とが平行である: $\overrightarrow{P_0H} \parallel (a, b, c)$. $(a, b, c) \neq 0$ なので, ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{P_0H} = t(a, b, c).$$

ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{P_0H} = t(a, b, c) .$$

$\overrightarrow{P_0H} = (p, q, r) - (x_0, y_0, z_0)$ なので, $(p, q, r) - (x_0, y_0, z_0) = t(a, b, c)$, よって

$$(p, q, r) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) .$$

$(p, q, r) \in L$ なので, $ap + bq + cr + d = 0$, $(a, b, c) \cdot (p, q, r) + d = 0$, よって

$$(a, b, c) \cdot \{(x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)\} + d = 0 ,$$

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + t(a^2 + b^2 + c^2) + d = 0 ,$$

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} .$$

直線 L と点 P_0 との間の距離は

$$\begin{aligned} \overline{P_0H} &= |\overrightarrow{P_0H}| = |t(a, b, c)| = \left| -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} . \end{aligned}$$

証明終了

例 xyz 座標空間において方程式 $4x + 3y - 2z = 9$ が表す平面と点 $(7, -5, 6)$ との間の距離を求める．方程式 $4x + 3y - 2z = 9$ つまり $4x + 3y - 2z - 9 = 0$ が表す平面と点 $(7, -5, 6)$ との間の距離は

$$\frac{|4 \cdot 7 + 3 \cdot (-5) - 2 \cdot 6 - 9|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{29}} .$$

終

問5.10.1 xyz 座標空間において方程式 $5x - 4y + 3z = 2$ が表す平面と点 $(8, 7, -6)$ との間の距離を求めよ.

方程式 $5x - 4y + 3z = 2$ つまり $5x - 4y + 3x - 2 = 0$ が表す平面と点 $(8, 7, -6)$ との間の距離は

$$\frac{|5 \cdot 8 - 4 \cdot 7 + 3 \cdot (-6) - 2|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{50}} = \frac{8}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{5}\sqrt{2} .$$