

5.9

座標平面における直線と点との間の距離

[定義] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において, 点 A と直線 L との間の距離とは, 直線 L に属す点の中で最も点 A に近い点 P と点 A との間の距離である.

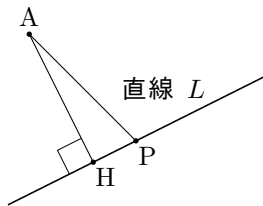
[定理] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において点 A は直線 L に属しないとす。点 A から直線 L に下ろした垂線の足を H とおくとき、点 A と直線 L との間の距離は線分 AH の長さ $\overline{AH}$ である。

[証明] 点 A から直線 L に下ろした垂線の足を H とおく。直線 L に属す点 P に対して、 $\overline{PH}^2 \geq 0$ なので

$$\overline{AH}^2 + \overline{PH}^2 \geq \overline{AH}^2,$$

$P \neq H$ のとき、三角形 AHP は $\angle AHP$ が直角である直角三角形なので、ピタゴラスの定理により $\overline{AH}^2 + \overline{PH}^2 = \overline{AP}^2$ 。 $P = H$ のときも

$\overline{AH}^2 + \overline{PH}^2 = \overline{AP}^2$ 。 よって $\overline{AP}^2 \geq \overline{AH}^2$ 。 $\overline{AP} \geq 0$ なので $\overline{AP} \geq \overline{AH}$ 。このように、直線 L に属す各点 P について $\overline{AP} \geq \overline{AH}$ 。従って直線 L に属す点の中で最も点 A に近い点は H である。故に点 A と直線 L と間の距離は線分 AH の長さ $\overline{AH}$ である。



[証明終了]

[定理 5.9] a, b, c, x_0, y_0 は定数で $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする. xy 座標平面において方程式 $ax + by + c = 0$ が表す直線と点 (x_0, y_0) との間の距離は $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ である.

[証明] 方程式 $ax + by + c = 0$ が表す直線を L とおく.

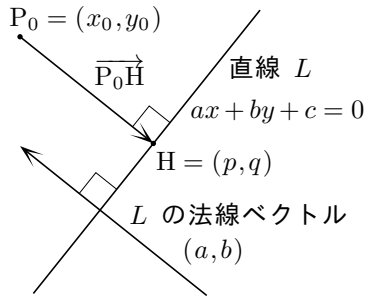
$(x_0, y_0) \in L$ のとき, $ax_0 + by_0 + c = 0$ なので $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$, 点 (x_0, y_0) と直線 L との間の距離も 0 である.

[定理 5.9] a, b, c, x_0, y_0 は定数で $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする. xy 座標平面において方程式 $ax + by + c = 0$ が表す直線と点 (x_0, y_0) との間の距離は $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ である.

[証明] 方程式 $ax + by + c = 0$ が表す直線を L とおく.

$P_0 = (x_0, y_0) \notin L$ とする. 点 P_0 から直線 L に下ろした垂線の足を $H = (p, q)$ とおく. 直線 L と点 P_0 との間の距離は $\overline{P_0H}$ である. 定理 5.4 により方程式 $ax + by + c = 0$ が表す直線 L の法線ベクトル (a, b) と直線 P_0H の方向ベクトル $\overrightarrow{P_0H}$ とが平行である: $\overrightarrow{P_0H} \parallel (a, b)$. $(a, b) \neq 0$ なので, ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{P_0H} = t(a, b) .$$



ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{P_0H} = t(a, b) .$$

$\overrightarrow{P_0H} = (p, q) - (x_0, y_0)$ なので,

$$(p, q) - (x_0, y_0) = t(a, b) ,$$

$$(p, q) = (x_0, y_0) + t(a, b) .$$

$(p, q) = H \in L$ なので, $ap + bq + c = 0$,

$(a, b) \cdot (p, q) + c = 0$, よって

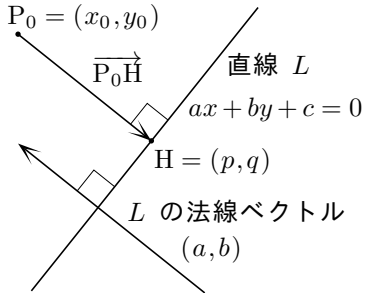
$$(a, b) \cdot \{(x_0, y_0) + t(a, b)\} + c = 0 ,$$

$$ax_0 + by_0 + t(a^2 + b^2) + c = 0 ,$$

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} .$$

直線 L と点 P_0 との間の距離は

$$\overline{P_0H} = |\overrightarrow{P_0H}| = |t(a, b)| = \left| -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$



証明終了

例 xy 座標平面において方程式 $5x - 3y = 4$ が表す平面と点 $(6, 7)$ との間の距離を求める．方程式 $5x - 3y = 4$ つまり $5x - 3y - 4 = 0$ が表す平面と点 $(6, 7)$ との間の距離は

$$\frac{|5 \cdot 6 - 3 \cdot 7 - 4|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{34}} .$$

終

問5.9.1 xy 座標平面において方程式 $4x - 5y = 7$ が表す平面と点 $(2, 3)$ との間の距離を求めよ.

方程式 $4x - 5y = 7$ つまり $4x - 5y - 7 = 0$ が表す平面と点 $(2, 3)$ との間の距離は

$$\frac{|4 \cdot 2 - 5 \cdot 3 - 7|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2}} = \frac{9}{\sqrt{41}} .$$

終

例 変数 s について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める： xy 座標平面において方程式 $2x - 3y = 7$ が表す直線と点 $(s, -4)$ との間の距離が 6 である．方程式 $2x - 3y - 7 = 0$ が表す直線と点 $(s, -4)$ との間の距離は

$$\frac{|2s - 3(-4) - 7|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2s - 5|}{\sqrt{13}} .$$

これが 6 なので,

$$\begin{aligned}\frac{|2s - 5|}{\sqrt{13}} &= 6 , \\ |2s - 5| &= 6\sqrt{13} , \\ 2s - 5 &= \pm 6\sqrt{13} , \\ 2s &= 5 \pm 6\sqrt{13} , \\ s &= \frac{5}{2} \pm 3\sqrt{13} .\end{aligned}$$

例 変数 t について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める： xy 座標平面において方程式 $4x - 3y = 1$ が表す直線と点 $(2, t)$ との間の距離が 4 以下である．方程式 $4x - 3y - 1 = 0$ が表す直線と点 $(2, t)$ との間の距離は

$$\frac{|4 \cdot 2 - 3t - 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|7 - 3t|}{\sqrt{25}} = \frac{|3t - 7|}{5} .$$

これが 4 以下なので、

$$\begin{aligned}\frac{|3t - 7|}{5} &\leq 4 , \\ |3t - 7| &\leq 20 , \\ -20 &\leq 3t - 7 \leq 20 , \\ -13 &\leq 3t \leq 27 , \\ -\frac{13}{3} &\leq t \leq 9 .\end{aligned}$$

例 変数 u について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める： xy 座標平面において方程式 $2x + y = 7$ が表す直線と点 $(u, 4u)$ との間の距離が 6 より大きい．方程式 $2x + y - 7 = 0$ が表す直線と点 $(u, 4u)$ との間の距離は

$$\frac{|2 \cdot u + 4u - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|6u - 7|}{\sqrt{5}} .$$

これが 6 より大きいので、

$$\frac{|6u - 7|}{\sqrt{5}} > 6 ,$$

$$|6u - 7| > 6\sqrt{5} ,$$

$$6u - 7 < -6\sqrt{5} \text{ または } 6u - 7 > 6\sqrt{5} ,$$

$$6u < 7 - 6\sqrt{5} \text{ または } 6u > 7 + 6\sqrt{5} ,$$

$$u < \frac{7}{6} - \sqrt{5} \text{ または } u > \frac{7}{6} + \sqrt{5} .$$

問5.9.2 変数 s について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求めよ： xy 座標平面において方程式 $5x - 4y = 7$ が表す直線と点 $(2, s)$ との間の距離が 8 である.

方程式 $5x - 4y - 7 = 0$ が表す直線と点 $(s, -4)$ との間の距離は

$$\frac{|5 \cdot 2 - 4s - 7|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 - 4s|}{\sqrt{41}} = \frac{|4s - 3|}{\sqrt{41}} .$$

これが 8 なので, $\frac{|4s - 3|}{\sqrt{41}} = 8$, $|4s - 3| = 8\sqrt{41}$, $4s - 3 = \pm 8\sqrt{41}$,
 $4s = 3 \pm 8\sqrt{41}$, $s = \frac{3}{4} \pm 2\sqrt{41}$.

終

問5.9.3 変数 t について次の条件と同値ななるべく簡単な条件を求めよ：

xy 座標平面において方程式 $3x - 2y = 4$ が表す直線と点 $(t, 4t)$ との間の距離が 7 より小さい.

方程式 $3x - 2y - 4 = 0$ が表す直線と点 $(4t, t)$ との間の距離は

$$\frac{|3t - 2 \cdot 4t - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|-5t - 4|}{\sqrt{13}} = \frac{|5t + 4|}{\sqrt{13}}.$$

これが 7 より小さいので, $\frac{|5t + 4|}{\sqrt{13}} < 7$, $|5t + 4| < 7\sqrt{13}$, $-7\sqrt{13} < 5t + 4 < 7\sqrt{13}$, $-4 - 7\sqrt{13} < 5t < -4 + 7\sqrt{13}$, $-\frac{4 + 7\sqrt{13}}{5} < t < -\frac{4 - 7\sqrt{13}}{5}$. 終

問5.9.4 変数 u について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求めよ： xy 座標平面において方程式 $3x + 4y = -15$ が表す直線と点 $(u, -2)$ との間の距離が 6 以上である。

方程式 $3x + 4y + 15 = 0$ が表す直線と点 $(u, -2)$ との間の距離は

$$\frac{|3u + 4 \cdot (-2) + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3u + 7|}{\sqrt{25}} = \frac{|3u + 7|}{5} .$$

これが 6 以上なので， $\frac{|3u + 7|}{5} \geq 6$ ， $|3u + 7| \geq 30$ ， $3u + 7 \leq -30$ または $3u + 7 \geq 30$ ， $3u \leq -37$ または $3u \geq 23$ ， $u \leq -\frac{37}{3}$ または $u \geq \frac{23}{3}$. 終