

5.8

内分点と外分点

[定理 5.8] 実数 p と q について $p \geq 0$ かつ $q \geq 0$ とする. ベクトル a と b について,

a と b とが同じ向きであるならば pa と qb とが同じ向きであり,
 a と b とが逆の向きであるならば pa と qb とが逆の向きである.

証明 a と b とが同じ向きであるならば, 定理 4.2.2 により $a \cdot b = |a||b|$ なので,

$$pa \cdot qb = pq(a \cdot b) = pq|a||b| = |pa||qb| ,$$

よって定理 4.2.2 により pa と qb とが同じ向きである. a と b とが逆の向きであるならば, 定理 4.2.2 により $a \cdot b = -|a||b|$ なので,

$$pa \cdot qb = pq(a \cdot b) = pq(-|a||b|) = -|pa||qb| ,$$

よって定理 4.2.2 により pa と qb とが逆の向きである.

証明終了

[定義] 実数 m, n について $m \geq 0$, $n \geq 0$, $m + n > 0$ とする. 座標空間において, 点 A と B とに対して点 P が線分 AB を $m : n$ に内分するとは,

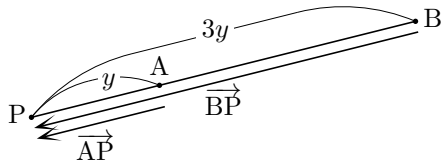
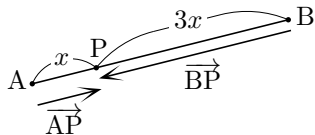
ベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ とが逆の向きで, $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$

となることであり, $m \neq n$ のとき, 点 P が線分 AB を $m : n$ に外分するとは,

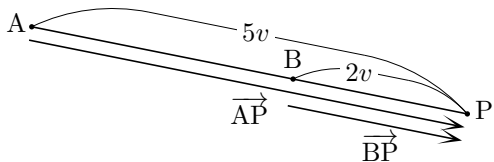
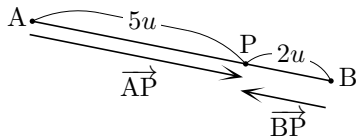
ベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ とが同じ向きで, $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$

となることである.

例 以下において, A, B, P は座標空間の点を表し, x, y, u, v は長さを表す.



点 P が線分 AB を $1:3$ に内分する. 点 P が線分 AB を $1:3$ に外分する.



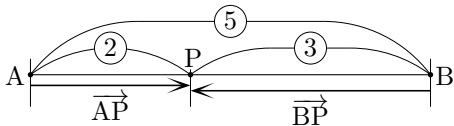
点 P が線分 AB を $5:2$ に内分する. 点 P が線分 AB を $5:2$ に外分する.

終

例 点 O を原点とする座標空間の点 A の位置ベクトルを a とおき，点 B の位置ベクトルを b とおき，点 P の位置ベクトルを p とおく．点 P が線分 AB を $2:3$ に内分するとする． p を a と b との線形結合で表す． $\overline{AP}:\overline{BP}=2:3$ なので，

$3\overline{AP}=2\overline{BP}$ ， よって

$$|3\overrightarrow{AP}| = 3\overline{AP} = 2\overline{BP} = |2\overrightarrow{BP}|,$$



例 点 O を原点とする座標空間の点 A の位置ベクトルを a とおき，点 B の位置ベクトルを b とおき，点 P の位置ベクトルを p とおく．点 P が線分 AB を $2:3$ に内分するとする． p を a と b との線形結合で表す． $\overline{AP}:\overline{BP}=2:3$ なので，

$3\overline{AP}=2\overline{BP}$ ，よって

$$|3\overrightarrow{AP}| = 3\overline{AP} = 2\overline{BP} = |2\overrightarrow{BP}|,$$

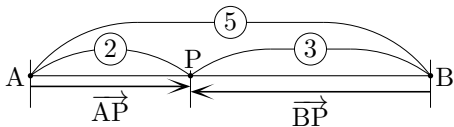
ベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ とが逆の向きなので，ベクトル $3\overrightarrow{AP}$ と $2\overrightarrow{BP}$ とが逆の向きである．定理 4.2.1 により

$$3\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{BP},$$

[定理 4.2.1] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について，

$|a|=|b|$ かつ a と b とが同じ向きならば， $a=b$ ，

$|a|=|b|$ かつ a と b とが逆の向きならば， $a=-b$ ．



例 点 O を原点とする座標空間の点 A の位置ベクトルを a とおき、点 B の位置ベクトルを b とおき、点 P の位置ベクトルを p とおく．点 P が線分 AB を $2:3$ に内分するとする． p を a と b との線形結合で表す． $\overline{AP}:\overline{BP}=2:3$ なので、

$3\overline{AP}=2\overline{BP}$ ， よって

$$|3\overrightarrow{AP}| = 3\overline{AP} = 2\overline{BP} = |2\overrightarrow{BP}|,$$

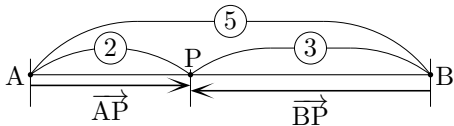
ベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ とが逆の向きなので、ベクトル $3\overrightarrow{AP}$ と $2\overrightarrow{BP}$ とが逆の向きである．定理 4.2.1 により

$$3\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{BP},$$

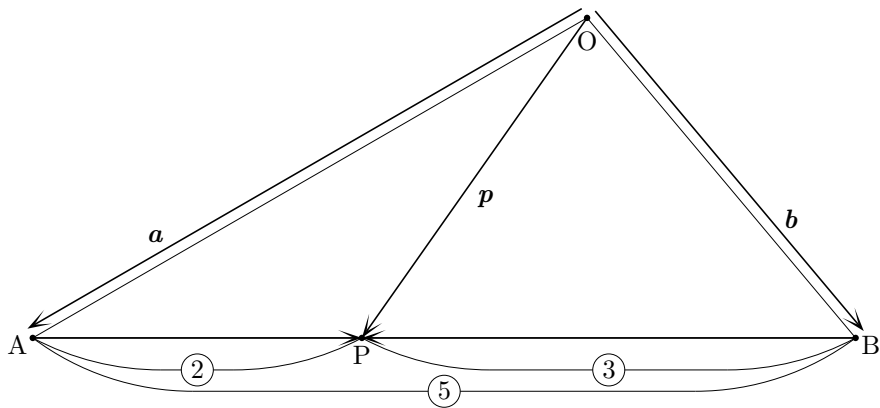
$$3(p - a) = -2(p - b),$$

$$5p = 3a + 2b,$$

$$p = \frac{3a + 2b}{5}.$$

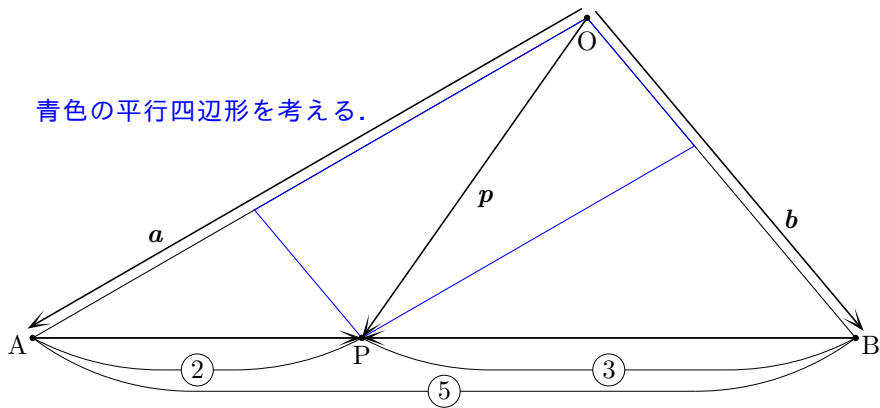


次のような図を考える．線分 AB を $2:3$ に内分する点 P の位置ベクトルは $p =$ である．

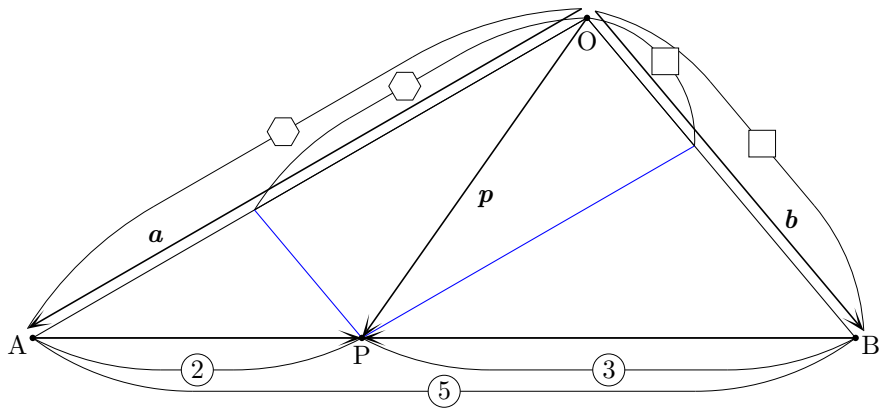


次のような図を考える．線分 AB を $2:3$ に内分する点 P の位置ベクトルは $p =$ である．

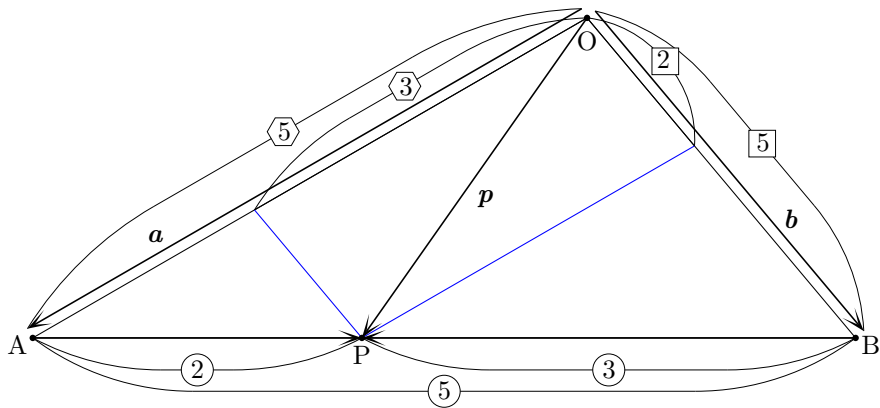
青色の平行四辺形を考える．



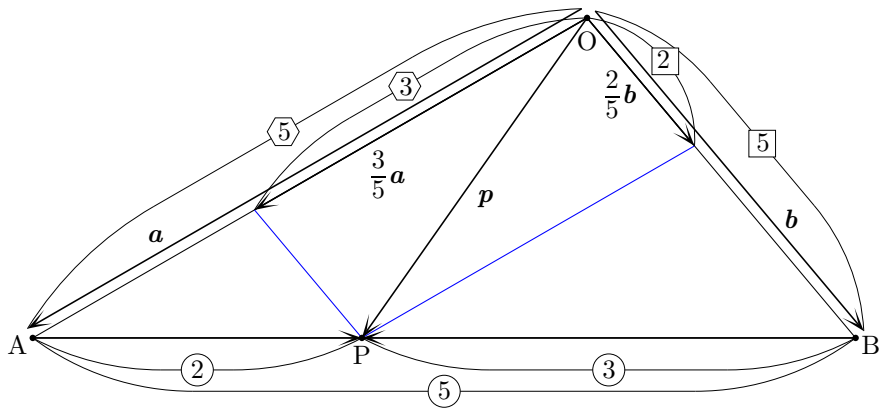
次のような図を考える．線分 AB を $2:3$ に内分する点 P の位置ベクトルは $p =$ である．



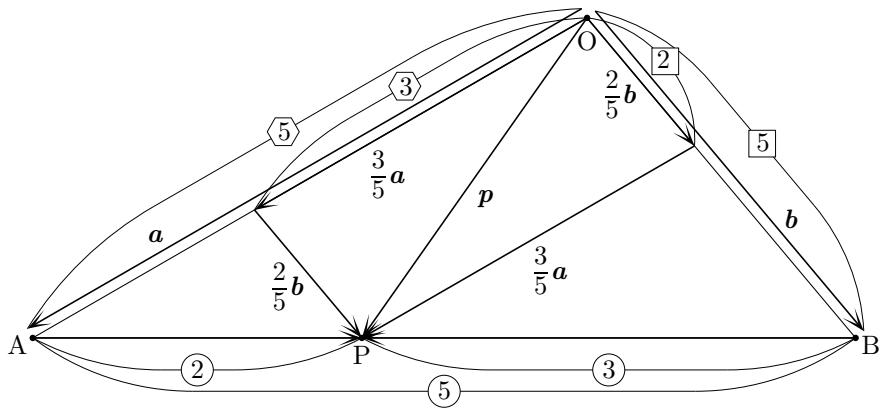
次のような図を考える．線分 AB を $2:3$ に内分する点 P の位置ベクトルは $p =$ である．



次のような図を考える．線分 AB を $2:3$ に内分する点 P の位置ベクトルは $p =$ である．



次のような図を考える．線分 AB を $2:3$ に内分する点 P の位置ベクトルは $p = \frac{3}{5}a + \frac{2}{5}b$ である．

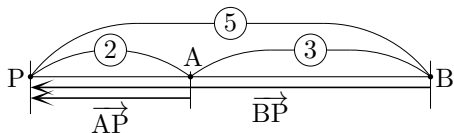


逆に，説明は省くが， $p = \frac{3a+2b}{5}$ ならば，点 P が線分 AB を 2:3 に内分する.

終

例 点 O を原点とする座標空間の点 A の位置ベクトルを a とおき，点 B の位置ベクトルを b とおき，点 P の位置ベクトルを p とおく．点 P が線分 AB を $2:5$ に外分するとする． p を a と b との線形結合で表す． $\overline{AP}:\overline{BP}=2:5$ なので，
 $5\overline{AP}=2\overline{BP}$ ， よって

$$|5\overrightarrow{AP}| = 5\overline{AP} = 2\overline{BP} = |2\overrightarrow{BP}|,$$



例 点 O を原点とする座標空間の点 A の位置ベクトルを a とおき，点 B の位置ベクトルを b とおき，点 P の位置ベクトルを p とおく．点 P が線分 AB を $2:5$ に外分するとする． p を a と b との線形結合で表す． $\overline{AP}:\overline{BP}=2:5$ なので，

$5\overline{AP}=2\overline{BP}$ ， よって

$$|5\overrightarrow{AP}| = 5\overline{AP} = 2\overline{BP} = |2\overrightarrow{BP}|,$$

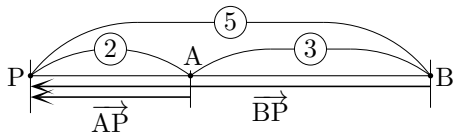
ベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ とが同じ向きなので，ベクトル $3\overrightarrow{AP}$ と $2\overrightarrow{BP}$ とが同じ向きである．定理 4.2.1 により

$$3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP},$$

[定理 4.2.1] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について，

$|a|=|b|$ かつ a と b とが同じ向きならば， $a=b$ ，

$|a|=|b|$ かつ a と b とが逆の向きならば， $a=-b$ ．



例 点 O を原点とする座標空間の点 A の位置ベクトルを a とおき，点 B の位置ベクトルを b とおき，点 P の位置ベクトルを p とおく．点 P が線分 AB を $2:5$ に外分するとする． p を a と b との線形結合で表す． $\overline{AP}:\overline{BP}=2:5$ なので，

$5\overline{AP}=2\overline{BP}$ ， よって

$$|5\overrightarrow{AP}| = 5\overline{AP} = 2\overline{BP} = |2\overrightarrow{BP}|,$$

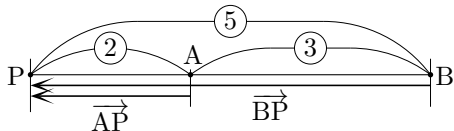
ベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ とが同じ向きなので，ベクトル $3\overrightarrow{AP}$ と $2\overrightarrow{BP}$ とが同じ向きである．定理 4.2.1 により

$$3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP},$$

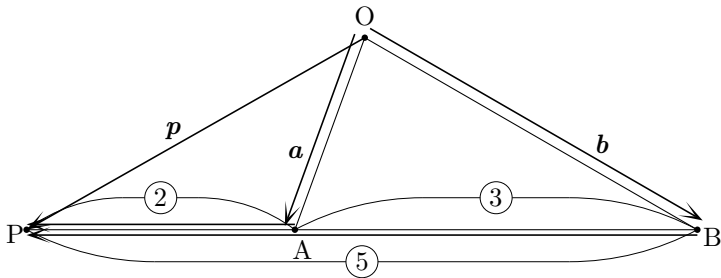
$$3(p - a) = 2(b - p),$$

$$3p = 2b + 3a,$$

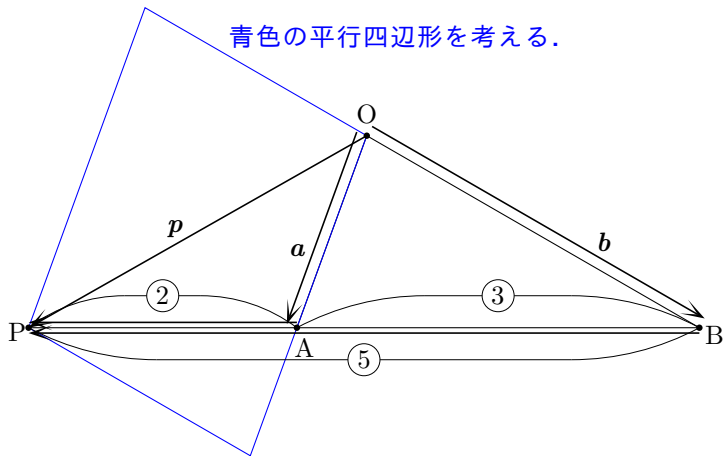
$$p = \frac{2b + 3a}{3}.$$



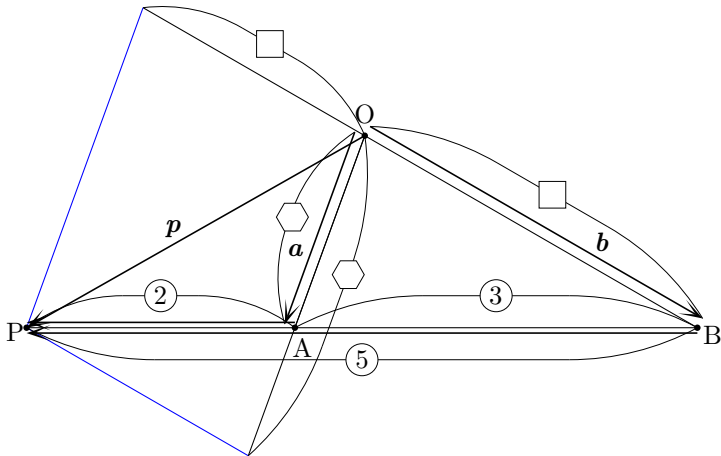
次のような図を考える．線分 AB を $2:5$ に外分する点 P の位置ベクトルは $p =$ である．



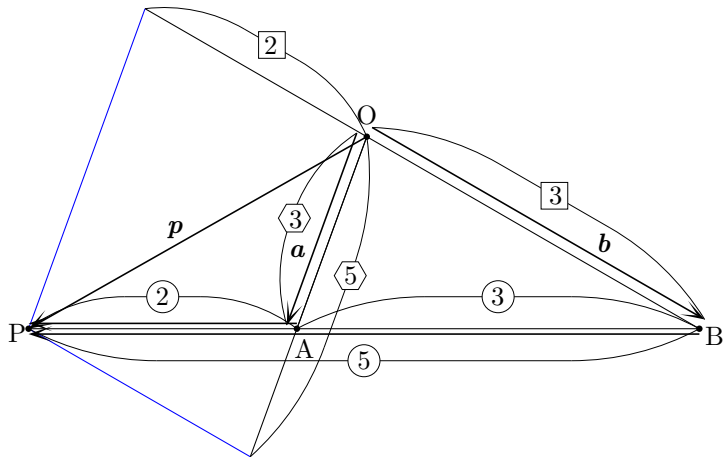
次のような図を考える．線分 AB を $2:5$ に外分する点 P の位置ベクトルは $p =$ である．



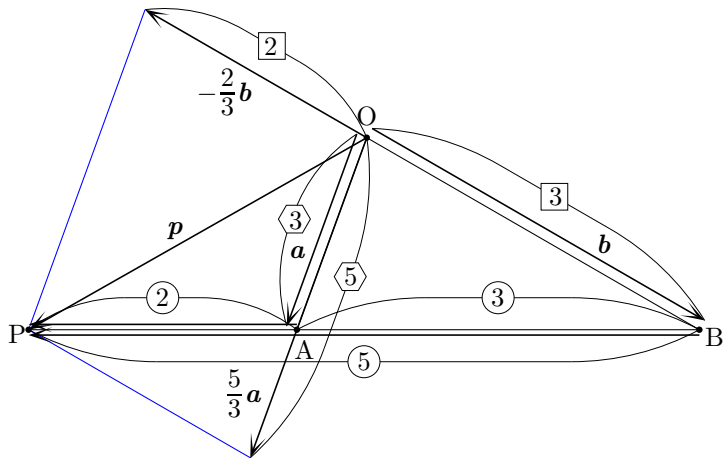
次のような図を考える．線分 AB を $2:5$ に外分する点 P の位置ベクトルは $p =$ である．



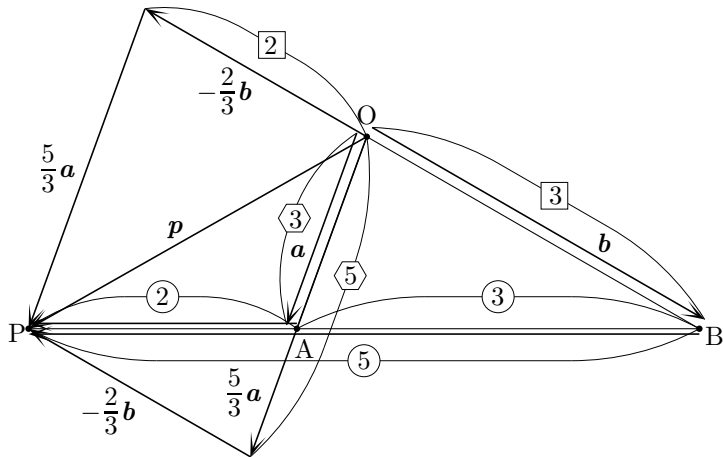
次のような図を考える．線分 AB を $2:5$ に外分する点 P の位置ベクトルは $p =$ である．



次のような図を考える．線分 AB を $2:5$ に外分する点 P の位置ベクトルは $p =$ である．



次のような図を考える. 線分 AB を $2:5$ に外分する点 P の位置ベクトルは $p = \frac{5}{3}a - \frac{2}{3}b$ である.



逆に，説明は省くが， $p = \frac{5}{3}a - \frac{2}{3}b$ ならば，点 P が線分 AB を 2 : 5 に外分する.

終

一般的には次の定理が成り立つ.

[定理 5.8] 実数 m, n について $m \geq 0$, $n \geq 0$, $m+n > 0$ とする. 座標空間の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおき, 点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおき, 点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とおく. このとき,

$$\text{点 } P \text{ が線分 } AB \text{ を } m:n \text{ に内分する} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \frac{n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}}{n+m} ,$$

$m \neq n$ のとき

$$\text{点 } P \text{ が線分 } AB \text{ を } m:n \text{ に外分する} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \frac{n\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{b}}{n-m} .$$

証明

$$\overrightarrow{AP} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{a} , \quad \overrightarrow{BP} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{b} .$$

点 P が線分 AB を $m:n$ に内分すると仮定する． $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$ なので $n\overline{AP}=m\overline{BP}$, よって

$$|n\overrightarrow{AP}| = n\overline{AP} = m\overline{BP} = |m\overrightarrow{BP}| .$$

$m \geq 0$ かつ $n \geq 0$ で, ベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ とが逆の向きなので, ベクトル $n\overrightarrow{AP}$ と $m\overrightarrow{BP}$ とが逆の向きである． 定理 4.2.1 により,

$$n\overrightarrow{AP} = -m\overrightarrow{BP} ,$$

$$n(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}) = -m(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}) ,$$

$$(n+m)\boldsymbol{p} = n\boldsymbol{p} + m\boldsymbol{b} ,$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}}{n+m} .$$

$m \neq n$ で点 P が線分 AB を $m:n$ に外分すると仮定する.

$\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ なので $n\overline{AP} = m\overline{BP}$, よって

$$|n\overrightarrow{AP}| = n\overline{AP} = m\overline{BP} = |m\overrightarrow{BP}| .$$

$m \geq 0$ かつ $n \geq 0$ で, ベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ とが同じ向きなので, ベクトル $n\overrightarrow{AP}$ と $m\overrightarrow{BP}$ とが同じ向きである. 定理 4.2.1 により,

$$n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{BP} ,$$

$$n(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}) = m(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}) ,$$

$$(n - m)\boldsymbol{p} = n\boldsymbol{p} - m\boldsymbol{b} ,$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{n\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{b}}{n - m} .$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}}{n + m} \quad \text{と仮定する.}$$

$$\overrightarrow{\text{AP}} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{a} = \frac{n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}}{n + m} - \boldsymbol{a} = \frac{-m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}}{n + m} = -\frac{m}{n + m}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) ,$$

$$\overrightarrow{\text{BP}} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{b} = \frac{n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}}{n + m} - \boldsymbol{b} = \frac{n\boldsymbol{a} - n\boldsymbol{b}}{n + m} = \frac{n}{n + m}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) .$$

$\overrightarrow{\text{BP}} \neq \mathbf{0}$ ならば, $n \neq 0$ なので, $\overrightarrow{\text{AP}} = -\frac{m}{n}\overrightarrow{\text{BP}}$, $-\frac{m}{n} \leq 0$ なので $\overrightarrow{\text{AP}}$ と $\overrightarrow{\text{BP}}$ とが逆の向きである. $A \neq B$ のとき, $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = \overline{\text{AB}} > 0$ なので,

$$\begin{aligned} \overline{\text{AP}} : \overline{\text{BP}} &= |\overrightarrow{\text{AP}}| : |\overrightarrow{\text{BP}}| = \left| -\frac{m}{n + m}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \right| : \left| \frac{n}{n + m}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \right| \\ &= \frac{m}{n + m}|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| : \frac{n}{n + m}|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \\ &= m : n . \end{aligned}$$

$A = B$ のときも $\overline{\text{AP}} : \overline{\text{BP}} = m : n$. 故に点 P が線分 AB を $m : n$ に内分する.

$m \neq n$ で $\mathbf{p} = \frac{n\mathbf{a} - m\mathbf{b}}{n - m}$ と仮定する.

$$\overrightarrow{\text{AP}} = \mathbf{p} - \mathbf{a} = \frac{n\mathbf{a} - m\mathbf{b}}{n - m} - \mathbf{a} = \frac{m\mathbf{a} - m\mathbf{b}}{n - m} = \frac{m}{n - m}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) ,$$

$$\overrightarrow{\text{BP}} = \mathbf{p} - \mathbf{b} = \frac{n\mathbf{a} - m\mathbf{b}}{n - m} - \mathbf{b} = \frac{n\mathbf{a} - n\mathbf{b}}{n - m} = \frac{n}{n - m}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) .$$

$\overrightarrow{\text{BP}} \neq \mathbf{0}$ ならば, $n \neq 0$ なので, $\overrightarrow{\text{AP}} = \frac{m}{n}\overrightarrow{\text{BP}}$, $\frac{m}{n} \geq 0$ なので $\overrightarrow{\text{AP}}$ と $\overrightarrow{\text{BP}}$ とが同じ向きである. $A \neq B$ のとき, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \overline{\text{AB}} > 0$ なので,

$$\begin{aligned}\overline{\text{AP}} : \overline{\text{BP}} &= |\overrightarrow{\text{AP}}| : |\overrightarrow{\text{BP}}| = \left| \frac{m}{n + m}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \right| : \left| \frac{n}{n + m}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \right| \\ &= \frac{m}{n + m}|\mathbf{a} - \mathbf{b}| : \frac{n}{n + m}|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \\ &= m : n .\end{aligned}$$

$A = B$ のときも $\overline{\text{AP}} : \overline{\text{BP}} = m : n$. 故に点 P が線分 AB を $m : n$ に外分する.

例 座標平面の点 $(4,7)$ と点 $(-6,3)$ とを結ぶ線分を $5:2$ に内分する点 P を求める．ベクトル $(4,7)$ と $(-6,3)$ とに対して，点 P の位置ベクトルは

$$\frac{2(4,7) + 5(-6,3)}{2+5} = \frac{(8,14) + (-30,15)}{7} = \frac{(-22,29)}{7} = \left(-\frac{22}{7}, \frac{29}{7}\right) .$$

よって $P = \left(-\frac{22}{7}, \frac{29}{7}\right)$ ．

終

問5.8.1 座標平面の点 $(1,4)$ と点 $(5,-9)$ とを結ぶ線分を $2:7$ に内分する点 P を求めよ.

ベクトル $(1,4)$ と $(5,-9)$ とに対して, 点 P の位置ベクトルは

$$\frac{7(1,4) + 2(5,-9)}{7+2} = \frac{(7,28) + (10,-18)}{9} = \frac{(17,10)}{9} = \left(\frac{17}{9}, \frac{10}{9}\right).$$

よって $P = \left(\frac{17}{9}, \frac{10}{9}\right)$.

終

例 座標平面の点 $(8,9)$ と点 $(4,5)$ と結ぶ線分を $7:2$ に外分する点 P を求める．ベクトル $(8,9)$ と $(4,5)$ とに対して，点 P の位置ベクトルは

$$\frac{2(8,9) - 7(4,5)}{2 - 7} = \frac{(16,18) - (28,35)}{-5} = \frac{(-12,-17)}{-5} = \left(\frac{12}{5}, \frac{17}{5}\right) .$$

よって $P = \left(\frac{12}{5}, \frac{17}{5}\right)$ ．

終

問5.8.2 座標平面の点 $(1,6)$ と点 $(2,4)$ と結ぶ線分を $8:5$ に外分する点 P を求めよ.

ベクトル $(1,6)$ と $(2,4)$ とに対して, 点 P の位置ベクトルは

$$\frac{5(1,6) - 8(2,4)}{5 - 8} = \frac{(5,30) - (16,32)}{-3} = \frac{(-11,-2)}{-3} = \left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

よって $P = \left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

例 座標平面の点 A の位置ベクトル a と点 B の位置ベクトルを b とが平行でないとする．直線 AB に属す点 P の位置ベクトルがベクトル $7a - 4b$ と平行であるとき， P が線分 AB をどのような比に内分或いは外分する点か調べる．

a と b とが，平行でないので，線形独立である．定理 3.7.3 より $7a - 4b \neq 0$ ．点 P の位置ベクトル p がベクトル $7a - 4b$ と平行なので，定理 3.5.4 より，ある実数 k をとると $p = k(7a - 4b) = 7ka - 4kb$ ．点 P が直線 AB に属するので，定理 3.5.2 より， $7k - 4k = 1$ ， $k = \frac{1}{3}$ ．よって

$$p = \frac{7}{3}a + \frac{4}{3}b = \frac{7a - 4b}{7 - 4}.$$

定理 5.8 より，点 P が線分 AB を $4:7$ に外分する．

終

問5.8.3 座標平面の点 A の位置ベクトルを a と点 B の位置ベクトルを b とが平行でないとする．直線 AB に属す点 P の位置ベクトルがベクトル $5a + 3b$ と平行であるとき， P が線分 AB をどのような比に内分或いは外分する点か調べよ．

a と b とが平行でないので $5a + 3b \neq 0$ ．点 P の位置ベクトル p がベクトル $5a + 3b$ と平行なので，ある実数 k をとると $p = k(5a + 3b) = 5ka + 3kb$ ．点 P が直線 AB に属するので， $5k + 3k = 1$ ， $k = \frac{1}{8}$ ．よって

$$p = \frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b = \frac{5a + 3b}{5 + 3}.$$

点 P が線分 AB を $3:5$ に内分する．

終

問5.8.4 座標平面の点 A の位置ベクトルを a と点 B の位置ベクトルを b とが平行でないとする．直線 AB に属す点 P の位置ベクトルがベクトル $-2a+9b$ と平行であるとき， P が線分 AB をどのような比に内分或いは外分する点か調べよ．

a と b とが平行でないので $-2a+9b \neq 0$ ．点 P の位置ベクトル p がベクトル $-2a+9b$ と平行なので，ある実数 k をとると $p = k(-2a+9b) = -2ka+9kb$ ．点 P が直線 AB に属するので， $-2k+9k=1$ ， $k = \frac{1}{7}$ ． よって

$$p = -\frac{2}{7}a + \frac{9}{7}b = \frac{2a-9b}{2-9} .$$

点 P が線分 AB を $9:2$ に外分する．

終

座標空間の点 A と B に対して，線分 AB を $1:1$ に内分する点を線分 AB の中点という．定理 5.8.2 によりすぐに次の定理が導ける．

[定理] 座標空間の点 A の位置ベクトルを a と，点 B の位置ベクトルを b とおくと，線分 AB の中点の位置ベクトルは $\frac{a+b}{2}$ ．